Charakterisierung der Produktion eines gewinnmaximierenden Unternehmens

Jörg Rambau*

1. Juni 2011

1 Problemstellung

Wie wirken sich veränderte Ein- und Verkaufspreise auf die Produktionsplanung und den Gewinn von Unternehmen aus? Fragen von diesem Typ stellt man sich z. B., wenn man die Auswirkungen ordnungspolitischer Maßnahmen (z. B. Besteuerungen oder Subventionen) auf wichtige Akteure einer Volkswirtschaft qualitativ und quantitativ abschätzen möchte.

Grundlage der Überlegungen ist die Annahme, dass Unternehmen sich rational verhalten, d. h. dass sie so agieren, dass ihr Gewinn maximal ist. Damit reduziert sich die eingangs formulierte Frage auf eine Charakterisierung von gewinnmaximierenden Entscheidungen und die Untersuchung der Abhängigkeit von den Parametern.

Nicht alle Einflussfaktoren werden in dieser Arbeit berücksichtigt: Wir beschränken uns auf *perfekten Wettbewerb*, in dem weder die Einkaufspreise noch die Verkaufspreise von der Produktionsplanung beeinflusst werden. Die Entscheidungsmöglichkeiten des Unternehmens beschränken sich ferner auf die Festlegung der Einkaufsmenge von Produktionsmitteln für die Produktion eines einzigen Produkts. Daraus ergeben sich direkt die Produktionskosten und indirekt, über eine Produktionsfunktion, die Produktionsmenge und damit der Produktionsertrag.

Gesucht ist eine Menge von einzukaufenden Produktionmitteln (*Inputvektor*), bei der der *Gewinn* des Unternehmens (also *Ertrag* minus *Kosten*) maximal ist. Ferner ist gesucht, wie eine optimale Menge und der optimale Gewinn sich ändern, wenn sich die Einkaufspreise und der Verkaufspreis ein wenig ändern.

Als Beispiel untersuchen wir die Frage für ein Unternehmen mit zwei Inputs und einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $f(\vec{x}) = f(x, y) = kx_1^{a_1}x_2^{a_2}$.

*leicht überarbeitet von Michael Stoll

2 Mathematisches Modell

Wir bezeichnen mit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ den Inputvektor (alle Vektoren verstehen wir als Spaltenvektoren), mit $f : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Produktionsfunktion, die jedem Inputvektor $\vec{x}$ die damit maximal mögliche Produktion $f(\vec{x})$ zuordnet. Wegen des perfekten Wettbewerbs sind die Einkaufspreise $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ nicht vom Input $\vec{x}$ abhängig und der Verkaufspreis p ist unabhängig vom Output $y = f(\vec{x})$. Interessant ist das nur unter den Annahmen $\vec{w} > \vec{0}$ (sonst kauft man beliebig viel) und $p > 0$ (sonst produziert man nichts).

Der Gewinn des Unternehmens $\Pi(\vec{x})$ ist gegeben durch Ertrag minus Kosten, also:

$$\Pi(\vec{x}) = py - \vec{w} \cdot \vec{x} = pf(\vec{x}) - \vec{w} \cdot \vec{x}.$$

Die Ausgangsfrage lautet nun mathematisch: Bei welchem $\vec{x}^*$ ist $\Pi(\vec{x})$ maximal und wie ändern sich $\vec{x}^*$ und $\Pi(\vec{x}^*)$, wenn sich p und $\vec{w}$ ein wenig ändern?

Letztere Aufgabe lässt sich wie folgt mathematisch genauer fassen: Es sei $\Pi^*(p, \vec{w})$ der optimale Gewinn bei Verkaufspreis p und Einkaufspreisen $\vec{w}$ und $\vec{x}^*(p, \vec{w})$ sei ein optimaler Inputvektor dazu. Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial p}(p, \vec{w}), \ \frac{\partial \Pi^*}{\partial w_j}(p, \vec{w}), \ \frac{\partial x_i^*}{\partial p}(p, \vec{w}), \ \frac{\partial x_i^*}{\partial w_j}(p, \vec{w})$$

(falls sie existieren) beantworten dann unsere Frage.

Es ist also mathematisch zu untersuchen, in welchen Fällen die partiellen Ableitungen gebildet werden können und welche Formeln dafür gelten.

3 Mathematische Analyse

Wenden wir uns dem Problem zu, ohne die Parameterabhängigkeit zu beachten. Was sind die Maxima der restringierten Maximumsaufgabe? Die Resultate stehen in [1, Satz 22.10], den wir im Folgenden erklären werden. Die Parameterabhängigkeit ist Gegenstand von [1, Satz 22.11], den wir danach besprechen.

Zunächst wollen wir charakterisieren, welche $\vec{x}^*$ überhaupt zu einem lokal maximalen Gewinn führen könnten. Um das zu untersuchen, können wir für C^1-Funktionen f (einmal stetig differenzierbar) die *notwendigen Bedingungen erster Ordnung* für restringierte Extrema von Π formulieren: Extrema sind *kritische Punkte*. Wir haben die *Nichtnegativitätsrestriktionen* $x_i \geq 0$ dabei zu beachten.

3.1 Notwendige Bedingungen

Ist also $\vec{x}^*$ ein restringiertes Maximum von Π unter den Nichtnegativitätsrestriktionen (mehrere Ungleichungsnebenbedingungen), so müssen wir zunächst die

Voraussetzungen von [1, Satz 18.4] prüfen und dann den Satz anwenden. Die Restriktions-Funktionen $g_1, \ldots, g_k$ sind in unserem Falle $-x_1, \ldots, -x_n$, also $k = n$. Die rechten Seiten der Restriktionen sind in unserem Falle alle null. Die Regularitätsbedingung NDCQ ist erfüllt, egal welche Ungleichungen im Extremum *bindend* (= mit Gleichheit erfüllt) sind, da die Jacobimatrix der Nebenbedingungen die negative Einheitsmatrix ist.

Die *Lagrange-Funktion* lautet in unserem Fall:

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \Pi(\vec{x}) + \vec{\lambda} \cdot \vec{x}.$$

Damit lautet das System der notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein extremales $\vec{x}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i}(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) = p\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) - w_i + \lambda_i^* &= 0, \\ -\vec{\lambda}^* \cdot \vec{x}^* &= 0, \\ -\vec{x}^* &\leq 0, \\ \vec{\lambda}^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Das heißt: Zunächst gilt wegen der Nicht-Negativität der *Lagrange-Multiplikatoren* $\vec{\lambda}^*$

$$p\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) \leq w_i.$$

Für alle Inputs, die tatsächlich eingekauft werden im Extremum $\vec{x}^*$ (d.h. für die die Nicht-Negativitäts-Restriktionen nicht bindend sind), ist der zugehörige Lagrange-Multiplikator zwangsläufig gleich null, so dass gilt:

$$p\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = w_i \quad \text{für alle } i \text{ mit } x_i^* > 0.$$

Wir nennen Punkte, die das System der notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllen, *kritische Punkte*. Damit sind die ersten beiden Aussagen von [1, Satz 22.10] hergeleitet. Die dritte Aussage ist die wörtliche Anwendung der *notwendigen Bedingung zweiter Ordnung* in [1, Seite 468 unten].

Die restlichen Aussagen beziehen sich auf *hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung*, also auf Eigenschaften der sogenannten *Hesse-Matrix*. Damit wir darüber sprechen können, müssen L – und damit Π und f – zweimal stetig differenzierbar, also C^2- Funktionen sein. (Die Hesse-Matrix einer reellwertigen Funktion von n Variablen an der Stelle $\vec{x}$ ist die $n \times n$-Matrix aller zweiten partiellen Ableitungen ausgewertet bei $\vec{x}$.)

3.2 Hinreichende Bedingungen

Sei ein kritischer Punkt $(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ für ein restringiertes Extremwertproblem

$$\max\{\, u(\vec{x}) \;\mid\; g_1(\vec{x}) \leq b_1, \ldots, g_k(\vec{x}) \leq b_k \,\}$$

mit mehreren Ungleichungen gegeben und seien $g_1, \ldots, g_e$ bindend für $\vec{x}^*$ (= mit Gleichheit erfüllt) und $g_{e+1}, \ldots, g_k$ nicht-bindend. Sei V die Menge der Punkte, die auf den Tangentialhyperebenen aller bindenden Nebenbedingungen durch $\vec{x}^*$ liegen, also die Menge

$$V := \{\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \;\mid\; \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_e}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_e}{\partial x_n} \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \,\}.$$

Die Aussage von [1, Satz 19.8] bedeutet: Wenn die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion L an $(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$

$$D^2L(\vec{x}^*) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) \end{pmatrix}$$

negativ definit auf allen Punkten in V ist, also

$$\vec{v}^T D^2L(\vec{x}^*)\vec{v} < 0 \quad \text{für alle } \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0},$$

so ist $\vec{x}^*$ ein striktes lokales restringiertes Maximum.

In [1, Satz 22.10] wird nur eine hinreichende Bedingung für Gewinnmaxima behauptet, für die *keine* Nichtnegativitätsrestriktion bindend ist, d. h. Gewinnmaxima, die nur strikt positive Inputs haben ($\vec{x}^* > 0$). Die Anwendung von [1, Satz 19.8] in dieser Situation ergibt: Ist die Hesse-Matrix $D^2L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ negativ definit, so ist $\vec{x}^*$ ein striktes lokales restringiertes Maximum. Berechnen wir die Hesse-Matrix von

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = pf(\vec{x}) - \vec{w} \cdot \vec{x} + \vec{\lambda} \cdot \vec{x}$$

in unserem Falle:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) - w_i + \lambda_i\right)(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) = p\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*).$$

Also:

$$D^2L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) = pD^2f(\vec{x}^*).$$

Wegen $p > 0$ ist damit die Hesse-Matrix von L genau dann negativ-definit, wenn die Hesse-Matrix von f es ist.

Wie prüft man nun, ob die Hesse-Matrix negativ-definit ist? Dazu wendet man ein Determinanten-Kriterium an: Eine Matrix ist negativ definit, wenn für alle $k = 1, 2, \dots, n$ die Determinanten der Teilmatrizen der ersten k Zeilen und Spalten (die *Hauptminoren*) das gleiche Vorzeichen haben wie $(-1)^k$. Das ist nun schließlich die hinreichende Bedingung, die in [1, Satz 22.10] angegeben ist.

Die letzte Behauptung von [1, Satz 22.10] folgt aus [1, Satz 19.9]. Dieser Satz entsteht durch Anwendung des *Satzes über implizite Funktionen* [1, Satz 15.7] auf das System notwendiger Bedingungen erster Ordnung: Der Optimierer $\vec{x}^*$ und die Lagrange-Multiplikatoren $\vec{\lambda}^*$ einer parametrischen Maximierungsaufgabe mit Ungleichungsrestriktionen

$$\max\{\ u(\vec{x}; \vec{a}) \ \mid\ g_1(\vec{x}; \vec{a}) \leq b_1, \dots, g_k(\vec{x}; \vec{a}) \leq b_k\ \}$$

hängen lokal einmal stetig differenzierbar vom Parametervektor $\vec{a}$ ab, wenn die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion *nicht-singulär* ist an $(x^*(\vec{a}), \vec{\lambda}^*(\vec{a}); \vec{a})$. Wegen der Vorzeichenbedingung an die Determinante der Hesse-Matrix von f in [1, Satz 22.10], ist diese Determinante insbesondere ungleich null, die Hesse-Matrix von f – und damit auch die von L – also nicht-singulär. Also ist [1, Satz 19.9] anwendbar und die Behauptung gezeigt.

3.3 Abhängigkeit von den Parametern

Für die Aussagen in [1, Satz 22.11] kann der *Einhüllendensatz* [1, Satz 19.4] angewendet werden. Er besagt (in der Fassung für einen Parametervektor): Es sei eine parametrische Maximierungsaufgabe ohne Restriktionen gegeben:

$$u^*(\vec{a}) := \max_{\vec{x}}\ u(\vec{x}).$$

Der Optimierer $\vec{x}^*(\vec{a})$ sei in einer Umgebung eines Optimums eine stetig differenzierbare Funktion vom Parametervektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$.

Dann gilt:

$$\frac{d}{da_i} u^*\big(\vec{x}^*(\vec{a}); \vec{a}\big) = \frac{\partial u^*}{\partial a_i}\big(\vec{x}^*(\vec{a}); \vec{a}\big)$$

Man beachte, dass die Aussage nicht-trivial ist: die partielle Ableitung auf der rechten Seite ist die Änderungsrate der Funktion u^* bei Änderung von a_i und konstanten sonstigen Parameterwerten und konstantem $\vec{x}$, während die totale Ableitung auf der linken Seite die Änderungsrate der Funktion u^* bei Änderung von a_i *und der daraus resultierenden Änderung von* $\vec{x}^*(\vec{a})$ ist. Formal muss man auf der linken Seite u^* zunächst für feste $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_m$ als Funktion

$$\begin{aligned} a_i &\mapsto \vec{x}^*(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, a_i, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_m) \\ &\mapsto u^*(\vec{x}^*(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, a_i, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_m); \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, a_i, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_m) \end{aligned}$$

von einer einzigen Variablen a_i auffassen (das ist im Buch etwas ungenau); dann ist die totale Ableitung einfach die normale Ableitung. Die genannten Ausdrücke sind im Allgemeinen unterschiedlich, weil bei der linken Seite noch die mehrdimensionale *Kettenregel* anzuwenden ist. Hier ist ein einfaches Beispiel, bei dem die Ausdrücke nicht gleich sind:

$$x(a) = a,\ f(x, a) = x \Rightarrow \frac{d}{da} f(x(a), a) = \frac{d}{da}(a) = 1 \neq 0 = \frac{\partial}{\partial a}(x) = \frac{\partial f}{\partial a}(x, a).$$

Gleich sind die Ausdrücke aber an einem kritischen Punkt $\vec{x}^*$, weil dort eine kleine Änderung von $\vec{x}^*$ keine Änderung von u bewirkt. (Das ist gerade die entscheidende Eigenschaft kritischer Punkte.)

Warum können wir nun den *Einhüllendensatz ohne Restriktionen* [1, Satz 19.4] auf unsere Aufgabe mit Nicht-Negativitätsbedingungen anwenden? Nun: behauptet werden die Beziehungen nur für strikt positive Maximierer $\vec{x}^*$ beim Parametervektor $\vec{a}$. Dort ist also keine Nicht-Negativitätsrestriktion bindend. Also spielen lokal die Nicht-Negativitätsrestriktionen dort keine Rolle.

Was ergibt nun die Auswertung des Einhüllendensatzes? Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial p}(p, \vec{w}) &= \frac{d}{dp} \Pi\big(\vec{x}^*(p, \vec{w}); p, \vec{w}\big) \overset{19.4}{=} \frac{\partial \Pi}{\partial p}(\vec{x}^*(p, \vec{w}); p, \vec{w}) \\ &= f\big(\vec{x}^*(p, \vec{w})\big) = y =: F(p, \vec{w}). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial w_i}(p, \vec{w}) &= \frac{d}{dw_i} \Pi\big(\vec{x}^*(p, \vec{w}); p, \vec{w}\big) \overset{19.4}{=} \frac{\partial \Pi}{\partial w_i}(\vec{x}^*(p, \vec{w}); p, \vec{w}) \\ &= -x_i^*(p, \vec{w}) =: -\chi_i(p, \vec{w}). \end{aligned}$$

Damit sind die ersten beiden Gleichungen von [1, Satz 22.11] mit Hilfe des Einhüllendensatzes [1, Satz 19.4] gezeigt.

Die restliche beiden Aussagen sind eine Konsequenz von *Youngs Satz* [1, Satz 14.5]: Bei einer zweimal *stetig partiell differenzierbaren* Funktion ist die Reihenfolge der zweiten partiellen Ableitungen egal. Wenden wir das an auf die zweite Ableitung von Π^*, so finden wir:

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial^2 \Pi^*(p, \vec{w})}{\partial w_i \partial w_j} = & \dfrac{\partial}{\partial w_i}\left(\dfrac{\partial \Pi^*(p, \vec{w})}{\partial w_j}\right) & = & -\dfrac{\partial \chi_j(p, \vec{w})}{\partial w_i} \\ \| & & & \\ \dfrac{\partial^2 \Pi^*(p, \vec{w})}{\partial w_j \partial w_i} = & \dfrac{\partial}{\partial w_j}\left(\dfrac{\partial \Pi^*(p, \vec{w})}{\partial w_i}\right) & = & -\dfrac{\partial \chi_i(p, \vec{w})}{\partial w_j}. \end{array}$$

Analog schließen wir:

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial^2\Pi^*(p,\vec{w})}{\partial w_i \partial p} & = \dfrac{\partial}{\partial w_i}\left(\dfrac{\partial \Pi^*(p,\vec{w})}{\partial p}\right) & = \dfrac{\partial F(p,\vec{w})}{\partial w_i} \\ \| & & \\ \dfrac{\partial^2\Pi^*(p,\vec{w})}{\partial p \partial w_i} & = \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\partial \Pi^*(p,\vec{w})}{\partial w_i}\right) & = -\dfrac{\partial \chi_i(p,\vec{w})}{\partial p}. \end{array}$$

Damit sind alle Aussagen aus [1, Satz 22.11] nachvollzogen.

4 Spezialfall: Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Wie angkündigt, untersuchen wir nun als Beispiel ein Unternehmen mit zwei Inputs x_1 und x_2 sowie einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = k x_1^{a_1} x_2^{a_2} \quad \text{mit } k, a_1, a_2 > 0.$$

Der Vektor $\vec{w}$ sei gleich (w_1, w_2). Alle Preise seien positiv, also $p, w_1, w_2 > 0$.

Nehmen wir ein Maximum (x_1^*, x_2^*) an mit $x_1^*, x_2^* > 0$ (sonst können wir einen Faktor aus der Betrachtung entfernen). Wir schreiben für das Maximum im Folgenden (x_1, x_2) zur Vereinfachung der Notation. Dann liefern die notwendigen Bedingungen aus [1, Satz 22.10]:

$$\begin{aligned} p\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= pka_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} = w_1, \\ p\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= pka_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} = w_2. \end{aligned}$$

Wie bei Cobb-Douglas-Gleichungssystemen üblich, folgern wir aus dem Quotienten beider Gleichungen:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{a_2}{a_1}. \tag{1}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1^{1-a_1-a_2} &= pk\left(\frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{a_2}{a_1}\right)^{a_2} \cdot \frac{a_1}{w_1} = pk\left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{a_2} \cdot \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{1-a_2}, \\ x_2^{1-a_1-a_2} &= pk\left(\frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{a_1}{a_2}\right)^{a_1} \cdot \frac{a_2}{w_2} = pk\left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{1-a_1}. \end{aligned}$$

Falls $1 - a_1 - a_2 = 0$ gilt dann, da (x_1, x_2) ja als kritischer Punkt vorausgesetzt war:

$$pk\left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{a_2} \cdot \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{1-a_2} = 1, \quad pk\left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{1-a_1} = 1.$$

In diesem Falle bleibt nur Gleichung (1) als notwendige Bedingung für kritische Punkte. Also kann man in diesem Fall nur folgern, dass $\frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{w_1}{w_2} \Big/ \frac{a_1}{a_2}$ sein muss. Alle (x_1, x_2) mit dieser Eigenschaft sind kritisch.

Falls $a_1 + a_2 \neq 1$, so sind x_1, x_2 eindeutig bestimmt wie folgt:

$$x_1 = (pk)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{1-a_2}{1-a_1-a_2}} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}},$$
$$x_2 = (pk)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{a_1}{1-a_1-a_2}} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{1-a_1}{1-a_1-a_2}}.$$

Die Hesse-Matrix sieht wie folgt aus:

$$D^2(f)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} ka_1(a_1-1)x_1^{a_1-2}x_2^{a_2} & ka_1a_2x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1} \\ ka_1a_2x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1} & ka_2(a_2-1)x_1^{a_1}x_2^{a_2-2} \end{pmatrix}.$$

Wenn $a_1 + a_2 < 1$, so ist diese Matrix nach dem Determinantenkriterium negativ definit, denn dann gilt wegen $a_1 - 1 < 0$ und $a_1 - 1 < 0$ sowie $1 - a_1 - a_2 > 0$:

$$\det\left(ka_1(a_1-1)x_1^{a_1-2}x_2^{a_2}\right) = ka_1(a_1-1)x_1^{a_1-2}x_2^{a_2} < 0,$$

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} ka_1(a_1-1)x_1^{a_1-2}x_2^{a_2} & ka_1a_2x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1} \\ ka_1a_2x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1} & ka_2(a_2-1)x_1^{a_1}x_2^{a_2-2} \end{pmatrix} \\ &= ka_1(a_1-1)x_1^{a_1-2}x_2^{a_2} \cdot ka_2(a_2-1)x_1^{a_1}x_2^{a_2-2} \\ &\quad - ka_1a_2x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1} \cdot ka_1a_2x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1} \\ &= k^2a_1a_2\big((a_1-1)(a_2-1) - a_1a_2\big)x_1^{2a_1-2}x_2^{2a_2-2} \\ &= k^2a_1a_2(1-a_1-a_2)x_1^{2a_2-2}x_2^{2a_2-2} \\ &> 0.\end{aligned}$$

Im Falle $a_1 + a_2 > 1$ ist die Hesse-Matrix indefinit.

Die Formel für kritische Punkte

$$x_1 = \chi_1(p, w_1, w_2) = (pk)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{1-a_2}{1-a_1-a_2}} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}},$$
$$x_2 = \chi_2(p, w_1, w_2) = (pk)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{a_1}{1-a_1-a_2}} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{1-a_1}{1-a_1-a_2}},$$

ist bereits eine *explizite Funktion* in den Parametern p, w_1, w_2. Man kann also alle Ableitungen in [1, Satz 22.11] im Prinzip durch Einsetzen und Ableiten bestimmen. Allerdings spart die Anwendung von [1, Satz 22.11] Rechenarbeit.

Zum Beispiel gilt nach dem Satz für die Sensitivität des optimalen Gewinns bzgl. des Verkaufspreises:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi^*}{\partial p}(p, w_1, w_2) &= F(p, w_1, w_2) = f\big(\chi(p, w_1, w_2)\big) \\ &= p^{\frac{a_1+a_2}{1-a_1-a_2}} k^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{a_1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}} .\end{aligned}$$

Einsetzen und ableiten macht die Berechnung der folgenden Ableitung erforderlich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi^*}{\partial p}(p, w_1, w_2) &= \frac{\partial}{\partial p}\left(p \cdot F(p, w_1, w_2) - w_1\chi_1(p, w_1, w_2) - w_2\chi_2(p, w_1, w_2)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p}\Bigg[p \cdot p^{\frac{a_1+a_2}{1-a_1-a_2}} k^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{a_1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}} \\ &\qquad - w_1 \cdot (pk)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{1-a_2}{1-a_1-a_2}} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}} \\ &\qquad - w_2 \cdot (pk)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{a_1}{1-a_1-a_2}} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{1-a_1}{1-a_1-a_2}}\Bigg].\end{aligned}$$

Eine längere, geschickte Rechnung zeigt, dass dasselbe herauskommt.[1] Ebenso verhält es sich mit der Sensitivität bzgl. w_1, w_2. Nach dem Satz gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi^*}{\partial w_1}(p, w_1, w_2) &= -\chi_1(p, w_1, w_2) = -(pk)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{1-a_2}{1-a_1-a_2}} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}} , \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial w_2}(p, w_1, w_2) &= -\chi_2(p, w_1, w_2) = -(pk)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_1}{w_1}\right)^{\frac{a_1}{1-a_1-a_2}} \cdot \left(\frac{a_2}{w_2}\right)^{\frac{1-a_1}{1-a_1-a_2}} .\end{aligned}$$

5 Zusammenfassung der Resultate in Worten

Die Resultate charakterisieren die Gewinn-maximalen Produktionsfaktoren eines Unternehmens. Beschränken wir uns auf den Fall, dass im Gewinnmaximum jeder Produktionsfaktor eine Rolle spielt. Dann kann man folgendes feststellen:

- Im Input-Optimum sind die Kosten für eine zusätzliche Einheit eines Produktionsfaktors gleich dem maximal daraus erzielbaren Ertrag [1, Satz 22.10 (41)].

[1] Wenn man das vereinfachte Ergebnis allerdings nicht kennt, ist es gar nicht so leicht, alle dafür notwendigen Termumformungen zu finden.

- Ist die Hesse-Matrix der Produktionsfunktion im Input-Optimum negativ definit, so hängen der optimale Gewinn und die zugehörigen Input-Optima zweimal stetig differenzierbar von den Einkaufs- und Verkaufspreisen ab [1, Satz 22.10, letzte Aussage].
- In diesem Falle verursacht
  - eine Einheit Verkaufspreissteigerung soviel zusätzlichen Gewinn, wie im Input-Optimum produziert wird (= Output-Optimum) [1, Satz 22.11 (43)];
  - eine Einheit Einkaufspreissteigerung soviel Gewinnverlust, wie im Input-Optimum eingekauft wird. [1, Satz 22.11 (44)]
  - eine Einheit Einkaufspreissteigerung eines Produktionsfaktors für alle Produktionsfaktoren eine identische Änderung des Input-Optimums. [1, Satz 22.11 (45)]
  - eine Einheit Verkaufspreissteigerung genau soviel Änderung des Input-Optimums wie eine Einheit Einkaufspreissenkung das Output-Optimum ändert. [1, Satz 22.11 (46)]

6 Liste der relevanten mathematischen Konzepte und Werkzeuge

Verwendet wurden:

- Notwendige Bedingungen erster Ordnung für eine Maximum unter Ungleichungsrestriktionen. Dafür:
  - Lagrange-Funktion mit Lagrange-Multiplikatoren
  - partielle Ableitungen
  - NDCQ (Nicht-degeneriertheits-Regularitätsbedingung) für lineare Restriktionen
- Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung für eine Maximum unter Ungleichungsrestriktionen. Dafür:
  - Hesse-Matrix
  - negativ semidefinite Matrix
- Hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung für eine Maximum unter Ungleichungsrestriktionen. Dafür:

  - Hesse-Matrix
  - negativ definite Matrix
  - Determinantenkriterium für negativ definit

- Satz über Systeme von impliziten Funktionen. Dafür:
  - partielle Ableitungen
  - nicht-singuläre Matrix
  - Determinantenkriterium für nicht-singulär

- Einhüllendensatz ohne Restriktionen. Dafür:
  - partielle Ableitungen
  - totale Ableitung
  - mehrdimensionale Kettenregel für das totale Differential

Literatur

[1] Carl P. Simon and Lawrence Blume. *Mathematics for Economists*. W. W. Norton & Company, New York, London, 1994.