4.4 Symmetrische Bilinearformen

Alle betrachteten Vektorräume seien euklidisch. Wir betrachten Bilinearformen

$$\Phi \colon V \times V \to \mathbb{R},$$

von denen wir nur voraussetzen, daß sie symmetrisch sind. Ist $\mathcal{B} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ eine Basisfolge, dann können wir zur Beschreibung von Φ wieder die Matrix

$$A := M_{\mathcal{B}}^{\Phi} := (\Phi(b_i, b_k))$$

benutzen, sie heißt die *Formmatrix.* Wegen der Symmetrie von Φ ist sie symmetrisch, $A = {}^tA$, und es gilt (wenn $v = \sum v_i b_i, w = \sum w_i b_i$) :

$$\Phi(v, w) = {}^tv \cdot M_{\mathcal{B}}^{\Phi} \cdot w = \sum_{i,k} a_{ik} v_i w_k.$$

Zu $\Phi \colon V \times V \to \mathbb{R}$ sei die zugehörige *quadratische Form* $\varphi \colon V \to \mathbb{R}$ definiert durch

4.4.1 $$\varphi(v) := \Phi(v, v).$$

Hierfür gilt, da Φ bilinear und symmetrisch ist:

4.4.2 $$\Phi(v, w) = \frac{1}{2}[\varphi(v + w) - \varphi(v) - \varphi(w)],$$

Φ ist also durch φ eindeutig bestimmt. Es folgt die *Parallelogramm-Identität:*

4.4.3 $$\varphi(v + w) + \varphi(v - w) = 2[\varphi(v) + \varphi(w)].$$

Stetige Funktionen $\psi \colon V \to \mathbb{R}$ mit 4.4.3 heißen *quadratische Funktionen.* Jede symmetrische Bilinearform liefert eine quadratische Funktion, denn φ ist stetig (vgl. den Beweis von **??**). Es gilt aber auch die Umkehrung:

4.4.4 Satz *Jede quadratische Funktion ergibt gemäß 4.4.2 eine symmetrische Bilinearform.*

Beweis: Sei also $\varphi \colon V \to \mathbb{R}$ quadratische Funktion und, gemäß 4.4.2 eine Abbildung $\Phi \colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiert. Sie soll als symmetrisch und bilinear nachgewiesen werden.

i) Die Symmetrie folgt unmittelbar aus 4.4.2.

ii) $\Phi(v_1 + v_2, w) = \Phi(v_1, w) + \Phi(v_2, w)$ erhält man aus 4.4.2, 4.4.3 nach leichten Rechnungen.

iii) $\Phi(-v, w) = -\Phi(v, w)$ ergibt sich aus ii) und liefert

$$\forall\ z \in \mathbb{Z}, v, w: \quad \Phi(zv, w) = z\Phi(v, w),$$

woraus wir schließen, daß

$$\forall\ q \in \mathbb{Q}, v, w: \quad \Phi(qv, w) = q\Phi(v, w).$$

Jetzt ergibt sich mit der rationalen Approximierbarkeit reeller Zahlen aus der Stetigkeit von φ schließlich, daß

$$\forall\ r \in \mathbb{R}, v, w: \quad \Phi(rv, w) = r\Phi(v, w),$$

womit alles bewiesen ist, denn $\Phi(v, v) = \varphi(v)$. □

Insgesamt gilt also

4.4.5 Folgerung *4.4.1 und 4.4.2 definieren eine Bijektion zwischen den Mengen der symmetrischen Bilinearformen und der quadratischen Funktionen auf V.*

Für die zu Φ gehörige quadratische Funktion φ gilt natürlich

$$\varphi(v) = \sum_{i,k} a_{ik} v_i v_k.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß V durch die Bilinearform Φ eine direkte Zerlegung $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$ erfährt in den Nullraum V_0 von Φ und die Unterräume $V_\pm$ wo Φ positiv bzw. negativ definit ist. Betrachten wir zunächst den Nullraum

$$V_0 := N_V = \{w \mid \forall\ v \in V : \Phi(v, w) = 0\} \leq V.$$

Die Differenz $\dim_{\mathbb{R}}(V) - \dim_{\mathbb{R}}(V_0)$ heißt auch der *Rang* von Φ. Ist V^* dual zu V bzgl. $\langle - \mid - \rangle : V \times V^* \to \mathbb{R}$ und $f : V \to V^*$ definiert durch

4.4.6 $$\Phi(v, w) = \langle v \mid f(w) \rangle,$$

dann gilt (nachrechnen) mit der zu $\mathcal{B}$ dualen Basisfolge $\mathcal{B}^*$:

4.4.7 Hilfssatz

i) $V_0 = \mathrm{Kern}(f)$,

ii) $\mathrm{Rang}(\Phi) = \mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(M_{\mathcal{B}}^{\Phi})$,

iii) $M_{\mathcal{B}}^{\Phi} = M(\mathcal{B}^*, f, \mathcal{B})$,

iv) Φ *nicht ausgeartet* $\iff \det(M_{\mathcal{B}}^{\Phi}) \neq 0$.

4.4.8 Definition (definit, semidefinit, indefinit) Ist $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, dann heißt Φ

i) *positiv definit,* wenn
$$\forall\ v \neq 0 :\ \varphi(v) > 0,$$

ii) *positiv semidefinit,* falls

$$\forall\ v :\ \varphi(v) \geq 0\ \wedge\ \exists\ v \neq 0 :\ \varphi(v) = 0.$$

Entsprechend sind *negativ definit* und *negativ semidefinit* zu verstehen. Nimmt φ dagegen sowohl positive als auch negative Werte an, dann heißt Φ *indefinit.*

•

4.4.9 Hilfssatz *Semidefinite symmetrische Bilinearformen Φ sind ausgeartet.*

Beweis: Ist $v \neq 0$ und $\varphi(v) = 0$, dann gilt nach der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\Phi(v,w)^2 \leq \varphi(v)\varphi(w) = 0,$$

also, für alle $w \in V$, $\Phi(v,w) = 0$.

□

4.4.10 Hilfssatz *Ist $\varphi(v) > 0$, dann ist Φ auf $\langle v\rangle^2$ positiv definit.*

Beweis:

$$\varphi(\rho v) = \Phi(\rho v, \rho v) = \rho^2\varphi(v) > 0,$$

falls $\rho \neq 0$.

□

Es gibt also, bei $\varphi(v) > 0$, ganze Unterräume U, so daß Φ auf U^2 positiv definit ist, und demnach auch Unterräume *maximaler Dimension* mit dieser Eigenschaft, etwa

$$V_+.$$

Wir setzen noch

$$V_- := V_+^\perp.$$

4.4.11 Hilfssatz *Ist Φ nicht ausgeartet, dann ist Φ auf V_-^2 negativ definit.*

Beweis:

i) Φ ist dort negativ semidefinit: Der Beweis erfolgt indirekt unter der Annahme eines $w \in V_-$ mit $\varphi(w) > 0$. Dazu betrachten wir

$$U := V_+ + \langle w\rangle \ \ni \ u = v + \rho w.$$

Wegen $v \perp w$ ergibt sich

$$\varphi(u) = \varphi(v) + \rho^2\varphi(w) > 0,$$

im Widerspruch zur Maximalität der Dimension von V_+.

ii) Φ ist dort sogar negativ definit: $w \in V_-$ mit $\varphi(w) = 0$ ergibt mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung:

$$\forall\, v \in V \ : \ \Phi(v,w) = 0,$$

also $w = 0$, denn Φ ist als nicht ausgeartet vorausgesetzt.

□

Wir können deshalb wie folgt zusammenfassen:

4.4.12 Satz *Ist Φ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform, dann ist*

$$V = V_+ \oplus V_-$$

und Φ ist auf V_+^2 positiv, auf V_-^2 negativ definit. Ist Φ ausgeartet, dann kommt noch der nicht triviale Nullraum hinzu:

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0.$$

Wählen wir eine an eine solche Zerlegung von V angepaßte ON-Basisfolge $\mathcal{B} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ so, daß $(b_0, \ldots, b_{s-1})$ Orthonormalbasisfolge von V_+ ist bzgl. Φ, $(b_s, \ldots, b_{s+r-1})$ Orthonormalbasisfolge von V_- bzgl. $-\Phi$ und $(b_{s+r}, \ldots, b_{n-1})$ eine Basisfolge für V_0, dann ist

$$M_{\mathcal{B}}^{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

Hierbei sind die Anzahlen der Einsen s, der sogenannte Index *von Φ, und r, die Anzahl der Diagonalelemente -1, eindeutig bestimmt.*

□

$\mathbb{R}-$Vektorräume mit symmetrischen, nicht ausgearteten indefiniten Bilinearformen Φ treten u.a. in Untersuchungen im Rahmen der Relativitätstheorie auf, sie heißen *pseudo-euklidisch.* Hierbei heißen die Vektoren $v \in V$ mit $\Phi(v, v) > 0$ *raumartig,* solche mit $\Phi(v, v) < 0$ *zeitartig,* die mit $\Phi(v, v) = 0$ heißen *Lichtvektoren* (sie bilden den sogenannten *Lichtkegel.*

4.4.13 Beispiel Ist z.B. $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ und 1 der Index von Φ, dann hat die Bilinearform Φ eine Formmatrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

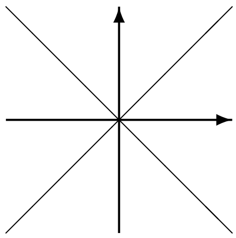
Die quadratische Form hat also die Werte

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}\right) = \rho^2 - \sigma^2.$$

Der Lichtkegel

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \pm\rho \\ \rho \end{pmatrix} \mid \rho \in \mathbb{R} \right\}.$$

dieser *pseudoeuklidischen Ebene* besteht also aus 2 Geraden:



L wird also erzeugt von den Vektoren

$$r_{\pm} := \begin{pmatrix} \pm\rho_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix},$$

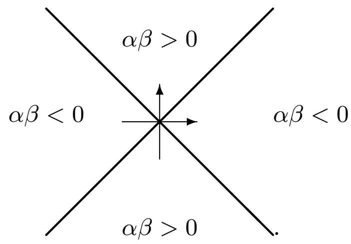
für ein festes $\rho_0 > 0$. Weil $\varphi(r_+) = \varphi(r_-) = 0$, Φ aber nicht ausgeartet ist, können wir annehmen, es sei

$$\Phi(r_+, r_-) = -1.$$

Es folgt

$$\varphi(\alpha \cdot r_+ + \beta \cdot r_-) = -2\alpha\beta.$$

Dies zeigt, daß die zeitartigen Vektoren wie auch die raumartigen Vektoren jeweils einen Kegel, bestehend zwei Sektoren bilden, die von den Geraden des Lichtkegels eingeschlossen werden:



Jeweils einer von diesen heißt *Zukunftskegel,* der andere *Vergangenheitskegel.* $\diamond$

Diese Konstruktionen dienen also der Unterscheidung von zeitlichem und räumlichem Abstand zweier Ereignisse. Die allgemeine Situation beschreibt

4.4.14 Definition (Minkowski-Raum, Lorentz-Transformation) Endlichdimensionale $\mathbb{R}-$Vektorräume zusammen mit nicht ausgearteten indefiniten Bilinearformen $\langle - \mid - \rangle$ heißen *pseudo-euklidisch,* die Bilinearform heißt dann ebenfalls das *innere Produkt,* ihr Index s der *Index* des pseudo-euklidischen Raums. Eine Basisfolge $\mathcal{B}$ heißt dabei *orthonormal,* wenn gilt

$$\langle b_i \mid b_k \rangle = \epsilon_i \delta_{ik}, \epsilon_i = \begin{cases} 1, & i \in s \\ -1, & i \in n \backslash s \end{cases}$$

Wir haben bereits gesehen, daß solche Orthonormalbasisfolgen stets existieren. Bezüglich einer solchen gilt

$$\langle v \mid w \rangle = \sum_{i=0}^{s-1} v_i w_i - \sum_{i=s}^{n-1} v_i w_i,$$

und die Gleichung des Lichtkegels ist

$$\sum_{i=0}^{s-1} v_i^2 - \sum_{i=s}^{n-1} v_i^2 = 0.$$

Interessant sind insbesondere die pseudo-euklidischen Räume V vom Index $n - 1 := \dim_{\mathbb{R}}(V) - 1$. Unter diesen heißen die mit $n = 4$ *Minkowski-Räume,* deren Rotationen, also die Abbildungen $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ mit

$$\langle f(v) \mid f(w) \rangle = \langle v \mid w \rangle$$

heißen *Lorentz-Transformationen.* •

Eine Anwendung quadratischer Formen bzw. Funktionen in der klassischen Geometrie ist beispielsweise die Klassifizierung von Kegelschnitten und Verallgemeinerungen dieser. Wir wollen deshalb den Begriff des *Kegelschnitts* verallgemeinern und erinnern deshalb zunächst daran, daß Kegelschnitte in der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2 := \mathbb{R}^2$ mit $D(\mathbb{E}^2) = \mathbb{R}^2$ Mengen von Punkten $X \in \mathbb{E}^2$ sind, so daß die Koordinaten x_0, x_1 ihrer Ortsvektoren einer Gleichung der Form

$$\sum_{i,k=0}^{1} a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{i=0}^{1} b_i x_i = c$$

genügen.

4.4.15 Beispiele

- Die Gleichung
$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} = 1$$
beschreibt eine *Ellipse* bzw. einen *Kreis* (falls $a = b$).
- Die Gleichung
$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{b^2} = 1$$
beschreibt eine *Hyperbel.*
- Die Gleichung $x_1^2 = 2px_0$ beschreibt eine *Parabel.*

◇

Diese Kegelschnitte werden also durch quadratische Formen und Linearformen beschrieben. Wir verallgemeinern deshalb wie folgt:

4.4.16 Definition (Quadrik) Unter einer *Quadrik* im euklidischen Raum $\mathbb{E}^n$ mit $D(\mathbb{E}^n) = \mathbb{R}^n$ versteht man eine Menge Q von Punkten X, deren Ortsvektoren x die Lösungsmenge einer Gleichung der Gestalt

$$\varphi(x) + 2f(x) = \alpha$$

bilden, mit einer quadratischen Form φ, einer Linearform f und einem $\alpha \in \mathbb{R}$. •

4.4.17 Hilfssatz *Quadriken im $\mathbb{E}^n$ sind Mengen von Punkten X, deren Ortsvektoren x Lösungsmengen von Gleichungen der Form*

$$\langle F(x) \mid x\rangle + 2\langle a \mid x\rangle = \alpha$$

mit selbstadjungiertem $F \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n), a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: Betrachten wir die Quadrik

$$Q := \{X \in \mathbb{E}^n \mid \varphi(x) + 2f(x) = \alpha\}.$$

Der Differenzenraum $\mathbb{R}^n$ ist euklidisch, $\langle - \mid - \rangle$ sei das innere Produkt. Dann kann nach 4.4.6 Φ, die symmetrische Bilinearform zu φ, mit einem geeigneten $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ so ausgedrückt werden:

$$\Phi(x, y) = \langle F(x) \mid y\rangle.$$

Nun ist aber Φ symmetrisch, ebenso $\langle - \mid - \rangle$, und wir erhalten

$$\langle F(x) \mid y\rangle = \Phi(x, y) = \Phi(y, x) = \langle F(y) \mid x\rangle = \langle x \mid F(y)\rangle = \langle \tilde{F}(x) \mid y\rangle.$$

Das impliziert $F = \tilde{F}$. Zudem ist jede Linearform $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ von der Gestalt $f(-) = \langle - \mid a\rangle$, mit geeigneten $a \in \mathbb{R}^n$. Es folgt, wie behauptet, daß

$$Q = \{X \mid \langle F(x) \mid x\rangle + 2\langle a \mid x\rangle = \alpha\}.$$

Die Umkehrung ist trivial.

□

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

Fall 1: $\exists\ S \in Q$: $F(s) + a = 0$. In diesem Fall kann a durch $-F(s)$ ersetzt werden. Es ergibt sich

$$\langle F(x) \mid x\rangle - 2\langle F(s) \mid x\rangle = \alpha.$$

Einsetzen von $x := s$ ergibt noch $\alpha = -\langle F(s) \mid s\rangle$, so daß wir insgesamt erhalten:

$$0 = \langle F(x) \mid x\rangle - 2\langle F(s) \mid x\rangle + \langle F(s) \mid s\rangle = \varphi(x - s),$$

wobei für die letzte Gleichung die Selbstadjungiertheit von F benutzt wird. Eine solche Quadrik

4.4.18 $$Q = \{X \mid \varphi(x-s) = 0\}$$

heißt *Kegel* mit der *Spitze* S.

Fall 2: $\forall\ X \in Q$: $F(x) + a \neq 0$. Das hat u.a. die Konsequenz, daß für alle Quadrikpunkte $X \in Q$ das orthogonale Komplement von $F(x)+a$, dem sogenannten *Normalenvektor* im Punkt x, eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ ist, der *Tangentialraum* zum Punkt x :

$$T(x) := \langle F(x) + a\rangle^{\perp} = \{y \mid \langle F(x) + a \mid y\rangle = 0\}.$$

Trägt man die Elemente des Tangentialraums $T(x)$ von x aus ab, dann erhält man die Vektoren (und daraus die Punkte) der *Tangentialhyperebene* in x :

$$H(x) := x + T(x).$$

Mit Φ und f formuliert lesen sich diese Gleichungen so:

4.4.19 $$T(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x, y) + f(y) = 0\} \leq \mathbb{R}^n,$$

4.4.20 $$H(x) = \{y \in \mathbb{E}^n \mid \Phi(x, y) + f(x + y) = \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

4.4.21 Satz *Ist Z ein Punkt der Quadrik Q, dann ist der Schnitt von Q mit einer Ebene E durch Z ein Kegelschnitt.*

Beweis: Sei $\varphi(x) + 2f(x) = \alpha$ wieder die Bestimmungsgleichung von Q und sei die Ebene E definiert durch

$$E := \{x \mid x = z + \xi u + \eta v, \xi, \eta \in \mathbb{R}\}$$

für zwei linear unabhängige $u, v \in \mathbb{R}^n$. Durch Einsetzen in die Bestimmungsgleichung ergibt sich

$$\xi^2\varphi(u) + 2\xi\eta\Phi(u, v) + \eta^2\varphi(v) + 2\xi(\Phi(u, z) + f(u)) + 2\eta(\Phi(v, z) + f(v)) = 0.$$

Die Menge der Vektoren (ξ, η), die dieser Gleichung genügen, ist ein Kegelschnitt.

$\square$

Verschiebt man den Koordinatenursprung im $\mathbb{E}^n$, d. h. ersetzt man x durch $z + x$, dann ergibt sich als neue Bestimmungsgleichung

4.4.22 $$Q = \{z + x \mid \varphi(x) + 2(\Phi(z, x) + f(x)) = \alpha - \varphi(z) - 2f(z)\}.$$

Um diese Bestimmungsgleichung zu vereinfachen, fragen wir, ob es solche z gibt, die die neue Linearform zum Verschwinden bringen, d. h. für die gilt

4.4.23 $$\Phi(z, x) + f(x) = \langle F(z) + a \mid x\rangle = 0,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Solche $z \in \mathbb{E}^n$ heißen gegebenenfalls *Zentren.* Die Menge *aller* Zentren ist demnach

4.4.24 $$Z(Q) := \{z \in \mathbb{E}^n \mid F(z) = -a\}.$$

Zentren sind — als Lösungen der Gleichung $F(z) = -a$ — offenbar bis auf Vektoren aus Kern(F) eindeutig bestimmt. Die Menge der Zentren ist also leer oder ein affiner Unterraum von $\mathbb{E}^n$ mit Kern(F) als zugehörigem Differenzenraum. Ist Q *nicht degeneriert,* d. h. die Q beschreibende Bilinearform nicht ausgeartet (und damit F regulär), dann besitzt Q ggf. genau ein Zentrum. Hat Q ein Zentrum Z, dann ist diese Quadrik von der Form

4.4.25 $$Q = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \varphi(x - z) = \beta\},$$

und dabei ist β genau dann gleich Null, wenn Q ein Kegel mit Spitze ist (die Spitze ist dann das Zentrum). Wegen $\beta \neq 0$, falls die Quadrik kein Kegel mit Spitze ist, kann (vgl. 4.4.22) — außer bei Kegeln mit Spitze — kein Zentrum auf der Quadrik liegen, es gilt sogar noch mehr:

4.4.26 Hilfssatz *Die Zentren von Quadriken Q, die keine Kegel mit Spitzen sind, liegen in keiner Tangentialhyperebene.*

Beweis: Indirekt. Ist Q eine Quadrik mit Zentrum $z \in Q$, aber kein Kegel mit Spitze, dann ist die Bestimmungsgleichung für die $y \in H(x)$ nach 4.4.20:

$$0 \neq \beta = \Phi(x, y) = \langle F(x) \mid y\rangle.$$

Wegen $a = 0$ ist aber $y \in Z(Q)$ genau dann, wenn $F(y) = 0$. Das ergibt den Widerspruch

$$0 = \langle x \mid F(y)\rangle = \langle F(x) \mid y\rangle.$$

□

Für die Lokalisierung von Zentren benutzt man zweckmäßig die Tatsache, daß jede Quadrik durch Punktspiegelung

$$\tau\colon x \mapsto 2z - x =: x'$$

an jedem ihrer Zentren in sich selbst übergeht:

$$\varphi(x' - z) = \varphi(2z - x - z) = \varphi(z - x) = \varphi(x - 1).$$

Aus dem Beweis des letzten Hilfssatzes ergibt sich noch mit **??** und durch Ersetzen von φ durch φ/β :

4.4.27 Folgerung *Eine Quadrik Q mit Zentrum, die kein Kegel mit Spitze ist, genügt einer Bestimmungsgleichung der Form $\varphi(x) = 1$, mit einer geeigneten quadratischen Form φ. Man nennt diese die* Normalform *der Bestimmungsgleichung. Wählt man noch eine Basisfolge $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\Phi(b_i, b_k) = \epsilon_i \delta_{ik}, \epsilon_i := \begin{cases} 1, & 0 \leq i \leq s - 1 \\ -1, & s \leq i \leq s + r - 1 \\ 0, & s + r \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

$s :=$ Index von φ, $r :=$ Rang von Φ, dann ist die Normalform der Bestimmungsgleichung von Q gerade diese:

$$\sum_{i=0}^{r-1} \epsilon_i x_i x_i = 1.$$

Beispiele solcher Normalformen von Quadriken mit Zentren in der Ebene sind:

Normalform	Typ
$x_0^2 + x_1^2 = 1$	Ellipse
$x_0^2 - x_1^2 = 1$	Hyperbel
$x_0^2 = 1$	zwei parallele Geraden

Im dreidimensionalen Anschauungsraum haben wir

Normalform	Typ
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$	Ellipsoid
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 1$	einschaliges Hyperboloid
$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$	zweischaliges Hyperboloid
$x_0^2 + x_1^2 = 1$	elliptischer Zylinder
$x_0^2 - x_1^2 = 1$	hyperbolischer Zylinder
$x_0^2 = 1$	zwei parallele Ebenen

Für Quadriken ohne Zentren kann man folgendes beweisen

4.4.28 Satz *Die Normalform einer Quadrik ohne Zentrum ist von der Form $\varphi(y) + 2\xi = 0$, bei Wahl einer Basis wie in 4.4.27 nimmt diese Bestimmungsgleichung die Form*

$$\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i y_i y_i + 2\xi = 0$$

an.