# Lineare Algebra II

## Letztes Übungsblatt

Sommersemester 2017

Michael Stoll

18. Juli 2017

Abgabe: **Montag, 24. Juli**, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
**Schnellhefter** und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})\,.$$

Zeigen Sie, dass der durch $A$ gegebene Endomorphismus von $\mathbb{R}^4$ nilzyklisch ist und finden Sie eine Matrix $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ mit $P^{-1}AP = J_4$. (25)

(2) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ mit in Linearfaktoren zerfallendem charakteristischen Polynom $\chi_A$ und sei $\lambda \in K$.
Zeigen Sie: Die geometrische Vielfachheit von $\lambda$ als Eigenwert von $A$ ist gleich der Anzahl der Jordan-Kästchen zum Eigenwert $\lambda$ in der Jordanschen Normalform von $A$. (10)

(3) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Q})\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform $J$ von $A$.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $P \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Q})$ mit $P^{-1}AP = J$.

(c) Geben Sie die Potenz $A^n$ explizit an (für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ beliebig). (15+15+15)

(4) Sei $V$ ein Vektorraum mit Basis $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ und sei $(b_1^*, b_2^*, \ldots, b_n^*)$ die duale Basis von $V^*$. Sei $\Phi \colon V^* \otimes V \to \mathrm{End}(V)$ der Isomorphismus aus Satz 27.9. Bestimmen Sie den Endomorphismus $\Phi\Big(\sum_{j=1}^n b_j^* \otimes b_j\Big)$. (20)

(5) Bonus Problem.

Consider a sequence $(a_n)$ of real numbers given by $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$ and $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ for $n \geq 0$. Let $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$.

(a) Show that $\left(\begin{smallmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{smallmatrix}\right) = A^n \left(\begin{smallmatrix} c \\ b \\ a \end{smallmatrix}\right)$ for all $n \geq 0$.

(b) Compute the Jordan normal form of $A$ and find a formula for $A^n$.

(c) Show that there are $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ with $a_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2$ for all $n \geq 0$. (10+10+5 extra points)