

Lineare Algebra II

Übungsblatt 10

SOMMERSEMESTER 2017

MICHAEL STOLL

4. Juli 2017

Abgabe: **Montag, 10. Juli**, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —

Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

- (1) Bestimmen Sie die euklidische Normalform gemäß Satz 24.5 der folgenden Quadriken im $\mathbb{R}^2$ (wir schreiben x, y für x_1, x_2):

(a) $2x^2 + 4xy + 2y^2 - x - y = 3$;

(b) $65x^2 - 156xy - 86x - 12y = 43$. (20+20)

- (2) Bestimmen Sie die euklidische Normalform des Kegelschnitts, der sich als Schnitt des Doppelkegels $x^2 + y^2 = z^2$ im $\mathbb{R}^3$ mit der Ebene $y = x + 1$ ergibt.

ANLEITUNG: Finden Sie zuerst eine Bewegung, die die gegebene Ebene in die Ebene $z = 0$ überführt (vergleiche Beispiel 24.4). (25)

- (3) Welche Typen von Kegelschnitten lassen sich **nicht** als Schnitt einer Ebene mit dem Doppelkegel $x^2 + y^2 = z^2$ erhalten? (Sie brauchen die Antwort nicht zu begründen.) (5)

- (4) (a) Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$. Zeigen Sie: $|a|^2 + |c|^2 = 1$ und $d = \bar{a}$, $b = -\bar{c}$.

HINWEIS: Im Fall $a \neq 0$ schreiben Sie $d = \lambda \bar{a}$. Drücken Sie b durch λ und c aus und folgern Sie schließlich $\lambda = 1$.

- (b) Sei $S^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ die Einheitssphäre. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$S^3 \longrightarrow \mathrm{SU}(2), \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \mathbf{i} & -x_3 + x_4 \mathbf{i} \\ x_3 + x_4 \mathbf{i} & x_1 - x_2 \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

ist bijektiv. (Auf diese Weise kann man die Gruppenstruktur von $\mathrm{SU}(2)$ auf S^3 übertragen; man erhält eine Gruppenstruktur auf S^3 mit stetiger Verknüpfung und Inversion.)

- (c) Der von $\mathrm{SU}(2)$ erzeugte reelle Untervektorraum von $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^8$ hat Dimension 4. (20+5+5)

- (5) BONUS PROBLEM.

Let $H \subset \mathbb{R}^3$ be the one-sheeted (= einschalig) hyperboloid given by $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Determine the set of all affine lines contained in H .

HINT. Any line contained in H can be written as $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^\top + \langle (a, b, 1)^\top \rangle_{\mathbb{R}}$ (why?). (25 extra points)