# Lineare Algebra II

## Übungsblatt 7

### Sommersemester 2017

Michael Stoll

13. Juni 2017

Abgabe: **Montag, 19. Juni**, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
**Schnellhefter** und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum mit abzählbar unendlicher Basis. Zeigen Sie, dass $V$ eine Orthonormalbasis hat. (10)

(2) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine obere Dreiecksmatrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}(n)$ mit $A = PT$.

Hinweis: „Übersetzen“ Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Spalten von $A$.

(b) Seien $A_j$ bzw. $T_j$ die $j$-te Spalte von $A$ bzw. $T$. Zeigen Sie: $\|A_j\| = \|T_j\|$.

(c) Folgern Sie die *Hadamardsche Ungleichung*:

$$|\det(A)| \le \|A_1\| \cdots \|A_n\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn die Spalten von $A$ paarweise orthogonal sind.

Hinweis: Beweisen Sie es erst für $T$. (15+10+20)

(3) (a) Zeigen Sie die folgende explizite Formel für das Vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} .$$

(b) Zeigen Sie für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$, dass $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|^2 + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2$ ist und folgern Sie für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ die Relation $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \sin \angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. (15+15)

(4) Sei $P$ der reelle Vektorraum der Polynomfunktionen mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx$.

Zeigen Sie: Es gibt kein $q \in P$, sodass für alle $p \in P$ gilt $\langle p, q \rangle = p(0)$. (15)

(Lemma 22.1 gilt also im Allgemeinen nicht für $\dim V = \infty$.)

(5) Bonus Problem.

Let $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$ be column vectors, and let $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ be the matrix whose columns are $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$. Show the following equivalence:

$$(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m) \text{ is linearly independent} \iff \det(A^\top A) \neq 0 .$$

(20 extra points)