Lineare Algebra II

Übungsblatt 5

Sommersemester 2017

Michael Stoll

23. Mai 2017

Abgabe: **Montag, 29. Mai**, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! — **Schnellhefter** und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Sei $f\colon V \to W$ linear. Wir erinnern uns an die Schreibweise $U^\circ = \{\phi \in V^* \mid \phi|_U = \mathbf{0}\}$ für Untervektorräume $U \subset V$ (analog für Untervektorräume von W).

(a) Zeigen Sie: $\ker(f^\top) = \operatorname{im}(f)^\circ$.
Folgern Sie, dass $f^\top$ genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie: $\operatorname{im}(f^\top) = \ker(f)^\circ$.
Folgern Sie, dass $f^\top$ genau dann surjektiv ist, wenn f injektiv ist.
Hinweis: Für die Inklusion „$\supset$“ sei $\tilde{f}\colon V/\ker(f) \to \operatorname{im}(f)$ der Isomorphismus aus dem Homomorphiesatz. $\psi \in \ker(f)^\circ \subset V^*$ induziert $\tilde{\psi}\colon V/\ker(f) \to K$; setzen Sie $\tilde{\psi} \circ \tilde{f}^{-1}$ zu einer Linearform auf W fort. (15+20)

(2) Seien $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ reelle Zahlen. Zeigen Sie: Es gibt eindeutig bestimmte reelle Zahlen $w_1, w_2, \ldots, w_n$, sodass für alle Polynomfunktionen p vom Grad $< n$ gilt

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = w_1 p(x_1) + w_2 p(x_2) + \ldots + w_n p(x_n)\,. \qquad (*)$$

Bestimmen Sie die w_j in den Fällen $(x_1, \ldots, x_n) = (-1, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
Hinweis: Die Auswertungsabbildungen $\operatorname{ev}_{x_j}\colon P_{<n} \to \mathbb{R}$ sind linear unabhängig. (25)

(3) Seien V und W zwei K-Vektorräume und sei $\beta\colon V \times W \to K$ eine Bilinearform.
Zeigen Sie: $\beta_R^\top \circ \alpha_V = \beta_L$ und $\beta_L^\top \circ \alpha_W = \beta_R$. (15)

(4) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, $(v, w) \mapsto \phi_1(v)\phi_1(w) + \ldots + \phi_n(v)\phi_n(w)$, ist eine symmetrische Bilinearform.

(b) Ist $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ eine Basis von V^*, dann ist β nicht-ausgeartet. (10+15)

(c) Ist $V^* \neq \langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$, dann ist β ausgeartet. (15 extra)

(5) Bonus Problem.
By varying the points x_j in Problem (2) above, one can try to make $(*)$ valid for polynomials of even higher degree. Find the optimal $(x_1, \ldots, x_n)$ together with the weights $(w_1, \ldots, w_n)$ for $n = 1, 2, 3$ ('optimal' in the sense that $(*)$ holds for polynomials up to the largest possible degree). (25 extra points)