

Lineare Algebra II

Übungsblatt 1

SOMMERSEMESTER 2017

MICHAEL STOLL

25. April 2017

Abgabe: **Dienstag, 2. Mai**, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —

Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

- (1) Sei V ein Vektorraum und sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von V . Zeigen Sie:

$$\sum_{i \in I} \langle A_i \rangle = \left\langle \bigcup_{i \in I} A_i \right\rangle. \quad (20)$$

- (2) Seien V ein Vektorraum und $p \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus mit $p \circ p = p$. Sei weiter $p' = \text{id}_V - p$. Zeigen Sie:

(a) $p \circ p' = p' \circ p = \mathbf{0}$ und $p' \circ p' = p'$.

(b) $V = \ker(p) \oplus \text{im}(p)$. (10+20)

- (3) Sei V ein reeller Vektorraum und sei $f \in \text{End}(V)$ mit $f \circ f = \text{id}_V$.

Finden Sie ein Komplement in V des Untervektorraums $U = \{v \in V \mid f(v) = v\}$ (natürlich mit Beweis).

HINWEIS: Betrachten Sie $p = (\text{id}_V + f)/2$. (25)

- (4) Finden Sie ein Beispiel für einen Vektorraum V und Untervektorräume U_1, U_2, U_3 mit

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2 + U_3) + \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 \cap U_3) + \dim(U_2 \cap U_3) \\ \neq \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \end{aligned} \quad (25)$$

- (5) BONUS PROBLEM.

Consider the standard vector space K^n with its standard basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Fix $0 \leq m \leq n$ and let $U_0 = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \rangle$. Denote by $\mathcal{C}$ the set of all complements to U_0 in K^n . If $U \in \mathcal{C}$, then $\pi_U: K^n \rightarrow U_0$ denotes the projection to U_0 associated to the splitting $K^n = U_0 \oplus U$.

- (a) Show that the two maps

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow U_0^{n-m}, \quad U \longmapsto (\pi_U(\mathbf{e}_{m+1}), \dots, \pi_U(\mathbf{e}_n))$$

and

$$G: U_0^{n-m} \rightarrow \mathcal{C}, \quad (u_1, \dots, u_{n-m}) \mapsto \langle \mathbf{e}_{m+1} - u_1, \dots, \mathbf{e}_n - u_{n-m} \rangle$$

are inverses of each other (and that G is well-defined).

- (b) What is the number of complements of a 2-dimensional subspace in $\mathbb{F}_2^4$?

(20+10 extra points)