Lineare Algebra II

Übungsblatt 2

SOMMERSEMESTER 2014

MICHAEL STOLL

15. April 2014

Abgabe: **Mittwoch(!), 30. April**, bis 11:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —

Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Sei V ein Vektorraum und seien $f, g \in \text{End}(V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie:

(a) Jeder Eigenraum $E_\lambda(f)$ ist unter g invariant.

(b) Ist V endlich-dimensional und sind f und g beide diagonalisierbar, dann hat V eine Basis, deren Elemente Eigenvektoren sowohl von f als auch von g sind.

(10+15)

(2) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und seien $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$.

Zeigen Sie: Es gibt reelle Zahlen $w_1, w_2, \dots, w_n$, sodass für alle Polynomfunktionen p vom Grad $< n$ gilt

$$\int_a^b p(x) dx = (b-a)(w_1 p(x_1) + w_2 p(x_2) + \dots + w_n p(x_n)). \quad (*)$$

Bestimmen Sie geeignete w_j in den Fällen $(x_1, \dots, x_n) = (\frac{a+b}{2}), (a, b), (a, \frac{a+b}{2}, b)$.

HINWEIS: Die Auswertungsabbildungen $\text{ev}_{x_j}: P_{<n} \rightarrow \mathbb{R}$ sind linear unabhängig. (25)

(3) Zeigen Sie:

(a) Sei V ein Vektorraum. Dann gilt $\alpha_V^\top \circ \alpha_{V^*} = \text{id}_{V^*}$.

(b) Sei $f: V \rightarrow W$ linear. Dann gilt $f^{\top\top} \circ \alpha_V = \alpha_W \circ f$. (15+15)

(4) Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume, sei $f: V \rightarrow W$ linear und sei $f^\top: W^* \rightarrow V^*$ die zu f duale lineare Abbildung.

Zeigen Sie: f injektiv $\iff f^\top$ surjektiv und f surjektiv $\iff f^\top$ injektiv.

HINWEIS: Betrachten Sie geeignete Matrizen. (20)

(5) BONUS PROBLEM.

By varying the points x_j in Problem (2) above, one can try to make (*) valid for polynomials of even higher degree. Find the optimal $(x_1, \dots, x_n)$ together with the weights $(w_1, \dots, w_n)$ for $n = 1, 2, 3$ ('optimal' in the sense that (*) holds for polynomials up to the largest possible degree). (25 extra points)

Frohe Ostern!