Ein großer Teil der Korrektorenstellen und ein Teil der Übungsgruppen wird aus Studienbeiträgen finanziert.

Lineare Algebra II

Übungsblatt 5

Sommersemester 2012

Michael Stoll

14. Mai 2012

Abgabe: **Montag, 21. Mai**, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).
Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt!

(1) Seien V ein Vektorraum und $f, g \in \operatorname{End}(V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie:

(a) Ist f nilpotent, dann ist auch $f \circ g$ nilpotent.

(b) Sind f und g nilpotent, dann ist auch $f + g$ nilpotent. (15+15)

(2) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C})$ mit $\chi_A = \chi_B$.

(a) Ist $n \leq 3$, dann sind A und B genau dann ähnlich, wenn sie dasselbe Minimalpolynom haben.

(b) Geben Sie für $n = 4$ Matrizen A und B an, die dasselbe Minimalpolynom haben, aber nicht ähnlich sind (mit Begründung). (15+10)

(3) Wie viele paarweise nicht zueinander ähnliche Matrizen $A \in \operatorname{Mat}(4, K)$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (X^2 - 1)^2$ gibt es maximal
(a) für $K = \mathbb{Q}$ (b) für $K = \mathbb{F}_2$? (15+15)

(4) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und $A \in \operatorname{Mat}(2, \mathbb{R})$ mit $\chi_A = X^2 - 2\lambda X + \lambda^2 + \mu^2$.
Zeigen Sie, dass A ähnlich ist zu $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst $B = \mu^{-1}(A - \lambda I_2)$. (15)

(5) Bonus Problem.
For $\alpha \in \mathbb{C}$, let $S(\alpha) = \langle 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ be the $\mathbb{Q}$-sub-vector space generated by all powers of α. α is said to be *algebraic* if $\dim_{\mathbb{Q}} S(\alpha) < \infty$.
Let $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ be algebraic. Show that $\alpha \pm \beta$ and $\alpha\beta$ are again algebraic and that α^{-1} is algebraic if $\alpha \neq 0$. (25 extra points)