Lineare Algebra I

Übungsblatt 8

Wintersemester 2016/2017

Michael Stoll

8. Dezember 2016

Abgabe:
Donnerstag, 15. Dezember, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Seien K ein Körper und $V = K^n$ (als K-Vektorraum).
Zeigen Sie: Die K-linearen Abbildungen $\phi\colon V \to K$ haben alle die Form

$$\phi\colon (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

mit geeigneten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$. (20)

(2) Seien V und W zwei K-Vektorräume mit $\dim V < \dim W < \infty$. Zeigen Sie, dass V und W *nicht* isomorph sind. (20)

(3) Bestimmen Sie den Rang der folgenden linearen Abbildungen. (Begründung nicht vergessen! Die Linearität müssen Sie nicht nachweisen.)

(a) $\phi_1\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto (x + y, y + z, x + z)$.

(b) $\phi_2\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \longmapsto (y - x, x - y, 0)$.

(c) $\phi_3\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \longmapsto (x - z, z - y)$. (10+10+10)

(4) Seien V_1, V_2 und W K-Vektorräume. Ist $f\colon V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung, dann definieren wir $f^*\colon \operatorname{Hom}(V_2, W) \to \operatorname{Hom}(V_1, W)$ durch $f^*(\phi) = \phi \circ f$. Zeigen Sie:

(a) f^* ist linear.

(b) Die Abbildung

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}(V_1, V_2) \longrightarrow \operatorname{Hom}\big(\operatorname{Hom}(V_2, W), \operatorname{Hom}(V_1, W)\big), \qquad f \longmapsto f^*$$

ist linear. (10+20)

(5) Bonus Problem.
Let P denote the real vector space of polynomial functions; we write $P_{\le n}$ for the linear subspace (= Untervektorraum) of polynomial functions of degree (= Grad) $\le n$. Show that for each $n \in \mathbb{N}$ there is a function $S_n \in P_{\le n+1}$ such that

$$\forall m \in \mathbb{N}\colon \sum_{j=0}^{m} j^n = S_n(m)\,.$$

Hint. Consider the map $\delta\colon P \to P$, $f \mapsto (x \mapsto f(x + 1) - f(x))$, and show that $\delta(P_{\le m+1}) = P_{\le m}$. (30 extra points)