Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen

Übungsblatt 11

Wintersemester 2017/18

Michael Stoll

11. Januar 2018

Abgabe:
Freitag, 19. Januar, bis 11:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Welche der folgenden Polynome sind in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel (und warum)?

(a) $x^3 - 4$.

(b) $x^4 - 4$.

(c) $x^5 + 5$.

(d) $x^6 + 1$.

(e) $x^8 + 1$. (5+5+5+5+5)

(2) (Staatsexamen Frühjahr 2010)

(a) Sei $f = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \in \mathbb{Z}[x]$. Seien a_1, a_4 ungerade und a_2, a_3 entweder beide gerade oder beide ungerade. Zeigen Sie: f ist irreduzibel.

(b) Sei K ein Körper. Ist $f = Y^3 + XY^2 + X^3 + X^2Y + X \in K[X, Y]$ irreduzibel? (10+15)

(3) Beweisen Sie Lemma 10.21:

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und seien $0 \neq f \in K[x]$ und $a \in K$. Die Vielfachheit von a als Nullstelle von f ist das (eindeutig bestimmte) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sodass $f^{(k)}(a) = 0$ ist für alle $0 \leq k < n$, aber $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Hinweis: Schreiben Sie $f = (x - a)^n g$ mit $g(a) \neq 0$. (25)

(4) (Staatsexamen Frühjahr 2013)

Sei $f \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass es höchstens $n - 1$ komplexe Zahlen α gibt, für die $f(x) - \alpha$ eine mehrfache Nullstelle hat. (25)

(5) Bonus Problem.

(Staatsexamen Frühjahr 2013, Teilaufgabe)

Let $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Define $f_0 = X$ und for $n \geq 1$, set $f_n = f_{n-1}(f) = f(f_{n-1})$, so that

$$f_1 = X^2 - 2, \quad f_2 = (X^2 - 2)^2 - 2, \quad f_3 = \big((X^2 - 2)^2 - 2\big)^2 - 2 \quad \text{etc.}$$

Show that all polynomials f_n are irreducible. (25 extra points)