# Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen

# Übungsblatt 5

## Wintersemester 2017/18

Michael Stoll

16. November 2017

Abgabe:
**Freitag, 24. November**, bis 11:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
**Schnellhefter** und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Für $x \in \mathbb{R}$ sei wie üblich $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}$.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ und $p \in \mathbb{P}$ gilt $\quad v_p(n!) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor$.

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

(c) Seien $p \in \mathbb{P}$, $k, e, n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ mit $k \le n$, $n > 0$. Aus $p^e \mid \binom{n}{k}$ folgt $p^e \le n$.
Hinweis: (a), (b) und $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$. (15+15+15)

(d) Bonus: For $x \in \mathbb{R}$ one defines $\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \le x\}$.
Show that for $n \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$, one has $\pi(n) \ge (\log 2)\frac{n}{\log n} - 1$.

Hint. Show that there is $0 \le k \le n$ such that $\binom{n}{k} \ge 2^n/n$. Use part (c) to show that $\binom{n}{k} \le n^{\pi(n)}$. (20 extra points)

Remark. Using similar considerations, one can also show that $\pi(n) \le Cn/\log n$ for some constant $C$. The **Prime Number Theorem** (conjectured by Legendre and Gauß at the beginning of the 19th century and proved independently by Hadamard and de la Vallée Poussin at its end) states that

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1\,.$$

(2) Bestimmen Sie die Primfaktorisierung von $\alpha = 3 + 21\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$: Schreiben Sie $\alpha$ als eine Einheit mal ein Produkt von Primelementen aus $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]}$ (mit $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]}$ wie in Satz 5.7).
Hinweis: Die Betrachtung von $N(\alpha)$ könnte helfen. (15)

(3) Sei $p$ eine Primzahl und sei $u \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid u^2 + 1$. Sei weiter $\pi$ ein ggT von $p$ und $u + \boldsymbol{i}$ in $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$. Zeigen Sie, dass $N(\pi) = p$ ist. (15)

(4) Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ungerade mit der Eigenschaft, dass es genau ein Paar $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt mit $a < b$, $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$ und $n = a^2 + b^2$.
Zeigen Sie, dass $n$ eine Primzahlpotenz ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Primfaktorzerlegung von $a + b\boldsymbol{i}$ in $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$. Welche Primelemente können vorkommen? Wie können Sie evtl. weitere Elemente derselben Norm finden? (25)