Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen

Übungsblatt 11

Wintersemester 2014/15

Michael Stoll

17. Dezember 2014

Abgabe:
Donnerstag, 8. Januar, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Beweisen Sie Lemma 10.21:

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und seien $f \in K[x]$ und $a \in K$. Die Vielfachheit von a als Nullstelle von f ist das (eindeutig bestimmte) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sodass $f^{(k)}(a) = 0$ ist für alle $0 \leq k < n$, aber $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Hinweis: Schreiben Sie $f = (x-a)^n g$ mit $g(a) \neq 0$. (25)

(2) Seien $f_n = x^n - 1 - (x-1)^n \in \mathbb{C}[x]$ und $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega^2 - \omega + 1 = 0$. Bestimmen Sie die Vielfachheit von ω als Nullstelle von f_n in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

Hinweis: $\omega - 1 = \omega^2$ und $\omega^3 = -1$. (25)

(3) Charakterisieren Sie die Primzahlen $p > 3$, sodass -6 ein quadratischer Rest mod p ist, durch geeignete Bedingungen an die Restklasse von p modulo n, für eine möglichst kleine ganze Zahl $n > 0$. (20)

(4) Welche der folgenden Gleichungen sind in $\mathbb{Z}$ lösbar?

(a) $x^2 - 97y^2 = 58$.

(b) $x^2 - 101y^2 = 43$.

(c) $x^2 - 103y^2 = 59$. (10+10+10)

(5) Bonus Problem.

(Staatsexamen Frühjahr 2013, Teilaufgabe)

Let $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Define $f_0 = X$ und for $n \geq 1$, set $f_n = f_{n-1}(f) = f(f_{n-1})$, so that

$$f_1 = X^2 - 2, \quad f_2 = (X^2-2)^2 - 2, \quad f_3 = \big((X^2-2)^2 - 2\big)^2 - 2 \quad \text{etc.}$$

Show that all polynomials f_n are irreducible. (25 extra points)