Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen

Übungsblatt 7

Wintersemester 2014/15

Michael Stoll

19. November 2014

Abgabe:
Donnerstag, 27. November, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Finden Sie jeweils eine Lösung oder zeigen Sie die Unlösbarkeit in $\mathbb{Z}$ der folgenden Gleichungen:

(a) $x^2 - 7y^2 = -4$

(b) $x^2 - 7y^2 = -3$

(c) $x^2 + y^2 = 2^{1000} + 1$

(d) $x^2 + y^2 = 2^{1000} - 1$ (10+10+10+10)

(e) Bonus: $x^2 + y^2 = 2^{1001} + 1$ (10 extra points)

(2) Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie:

(a) Ist $\{0\} \neq P \subset R$ ein primes Hauptideal, dann ist P ein maximales Hauptideal (d.h., es gibt kein *Hauptideal* I mit $P \subsetneq I \subsetneq R$).

Hinweis: Lemma 4.10.

(b) Ist R ein Hauptidealring, dann sind die maximalen Ideale von R genau die Primideale $\neq \{0\}$.

(c) Ist R ein Hauptidealring und $\phi\colon R \to R'$ ein surjektiver Ringhomomorphismus auf einen Integritätsbereich R', dann ist R' bereits ein Körper. (15+15+10)

(3) Sei $p \equiv 3 \bmod 4$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass der Faktorring $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]/\langle p\rangle_{\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]}$ ein Körper mit p^2 Elementen ist. (20)

(4) Bonus Problem.

Let $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ be a polynomial in several variables with coefficients in $\mathbb{Z}$ (like, for example, $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 30$). Show that the following two statements are equivalent:

(a) For all $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, there are $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{Z}$ such that $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv 0 \bmod n$.

(b) For all prime powers p^e ($p \in \mathbb{P}$, $e \geq 1$), there are $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{Z}$ such that $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv 0 \bmod p^e$. (20 extra points)