Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen

Übungsblatt 4

WINTERSEMESTER 2014/15

MICHAEL STOLL

29. Oktober 2014

Abgabe:

Donnerstag, 6. November, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —

Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Verwenden Sie den Erweiterten Euklidischen Algorithmus, um den ggT ihrer Matrikelnummer mit 9! (vgl. Blatt 2, Aufgabe (2)) als Linearkombination dieser beiden Zahlen darzustellen. (25)

(2) Sei R ein faktorieller Ring mit (bis auf Assoziierte) genau einem Primelement p . Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealring ist.

HINWEIS: Zeigen Sie, dass jedes Ideal $\neq \{0\}$ die Form Rp^e hat. (25)

(3) Sei $R \subset \mathbb{Q}$ ein Unterring.

(a) Sei $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie: $I \cap \mathbb{Z}$ ist ein Ideal von $\mathbb{Z}$.

(b) Sei $\frac{a}{b} \in R$ ein gekürzter Bruch. Zeigen Sie: $b \in R^\times$.

HINWEIS: Finden Sie geeignete $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \cdot \frac{a}{b} + n = \frac{1}{b}$.

(c) Sei $I \subset R$ ein Ideal und $I \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie: $I = nR$.

(Damit ist R ein Hauptidealring.)

HINWEIS: Verwenden Sie Teil (b). (10+15+15)

(4) Man definiert $\text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ und $\text{kgV}(a_1, \dots, a_n)$ für beliebig viele Elemente analog zu Definition 2.9.

Berechnen Sie $\text{kgV}(1, 2, 3, \dots, 12)$ in $\mathbb{Z}$. (10)

(5) BONUS PROBLEM.

Determine all subrings R of $\mathbb{Q}$ such that R has precisely one prime element up to associates.

HINT. Use the Bonus Problem of Problem Sheet 3 and Problem (3) above.

(25 extra points)