# Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen

## Übungsblatt 3

WINTERSEMESTER 2014/15

MICHAEL STOLL

22. Oktober 2014

Abgabe:
**Donnerstag, 30. Oktober**, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
**Schnellhefter** und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Sei $R$ ein Ring mit $0 \neq 1$.
Zeigen Sie, dass $\{(r, r) \mid r \in R\}$ ein Unterring von $R \times R$ ist. (10)

(2) Seien $R_1, R_2, \ldots, R_n$ kommutative Ringe und sei $I \subset R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ eine Teilmenge des Produktrings.
Zeigen Sie: $I$ ist genau dann ein Ideal, wenn es Ideale $I_1 \subset R_1$, $I_2 \subset R_2$, $\ldots$, $I_n \subset R_n$ gibt mit $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$.
HINWEIS: (für „$\Rightarrow$“) $I_j$ ist die Menge von Elementen von $R_j$, die als $j$te Komponente eines Elements von $I$ auftreten. (25)

(3) Sei $R$ ein kommutativer Ring. Zeigen Sie:
$R$ ist genau dann ein Körper, wenn $R$ genau zwei Ideale hat.
HINWEIS: Betrachten Sie auch den Fall, dass $R$ genau ein Ideal hat. (20)

(4) (a) Zeigen Sie
$$\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] = \{\tfrac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$
als Unterring von $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie
$$\mathbb{Z}[\sqrt[3]{17}] = \{u + v\sqrt[3]{17} + w\sqrt[3]{17}^2 \mid u, v, w \in \mathbb{Z}\}$$
als Unterring von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(c) Geben Sie eine ähnliche Darstellung als Menge der ganzzahligen Linearkombinationen gewisser Elemente für $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \boldsymbol{i}] \subset \mathbb{C}$. (15+15+15)

(5) BONUS PROBLEM.
Let $R \subset \mathbb{Q}$ be a subring. Show that there is a set $P$ of prime numbers (which can be empty, finite or infinite) such that $R = \mathbb{Z}[\{\frac{1}{p} \mid p \in P\}]$.
HINT. Set $P = \{p \mid p \text{ prime and } \frac{1}{p} \in R\}$. If $\frac{a}{b} \in R$ is a fraction in lowest terms (= gekürzter Bruch), show that $\frac{1}{b} \in R$ and deduce that $b$ is a product of primes in $P$. (25 extra points)