Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen

Übungsblatt 2

WINTERSEMESTER 2014/15

MICHAEL STOLL

16. Oktober 2014

Abgabe:

Donnerstag, 23. Oktober, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —

Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

- (1) Seien R ein Integritätsbereich und $a, b, c \in R$. Zeigen Sie Aussagen (2), (3) und (5) von Lemma 2.8:

$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c; \quad a \mid b \Rightarrow a \mid bc; \quad a \mid 0, 1 \mid a, a \mid a. \quad (6+6+6)$$

- (2) Berechnen Sie $\text{ggT}(m, 9!)$ mit dem Euklidischen Algorithmus, wobei m Ihre Matrikelnummer ist. ($9! = 362\,880$) (25)

- (3) Zeigen Sie direkt, dass die Funktion $N: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ von Beispiel 2.12 keine euklidische Normfunktion ist. (20)

- (4) Seien $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $a \geq b$ und $a_0 = a, a_1 = b, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N = 0$ die im Euklidischen Algorithmus berechneten Zahlen. Seien weiter $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (für $n \geq 0$) die Fibonacci-Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $0 \leq n \leq N$ gilt: $a_{N-n} \geq F_n$.

(b) Sei $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ ($\Rightarrow \phi^2 = \phi + 1$). Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (-\phi)^{-n}).$$

(c) Folgern Sie, dass es eine Konstante C (unabhängig von a und b) gibt, so dass

$$N \leq \frac{\log b}{\log \phi} + C. \quad (13+12+12)$$

- (5) BONUS PROBLEM.

Let R be an integral domain (= Integritätsbereich) satisfying the following ‘divisor chain condition’: if $(a_n)_{n \geq 0}$ is a sequence of elements of R such that $a_{n+1} \mid a_n$ for all $n \geq 0$, then there is some N such that $a_N \sim a_{N+1} \sim a_{N+2} \sim \dots$

For any subset $S \subset R$, call $g \in R$ a *greatest common divisor* (gcd) of S if

(i) $g \mid a$ for all $a \in S$, and

(ii) for all $g' \in R$ such that $g' \mid a$ for all $a \in S$, we have $g' \mid g$.

Assume that $\text{gcd}(a, b)$ exists for every pair of elements $a, b \in R$. Show that every at most countable subset of R has a greatest common divisor. (25 extra points)