Einführung in die Computeralgebra

Übungsblatt 3

Sommersemester 2016

Michael Stoll

29. April 2016

Abgabe:
Freitag, 6. Mai in der Vorlesung (bis 11:00 Uhr online für Programmieraufgaben).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten (außer Programmieraufgaben);
nur ein Name pro Blatt! —
Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Verifizieren Sie die Abschätzungen für die Komplexität der Berechnung der s_i bzw. t_i im Erweiterten Euklidischen Algorithmus für Polynome (dabei müssen nur die Multiplikationen $q_i s_i$ bzw. $q_i t_i$ berücksichtigt werden; die Differenz mit s_{i-1} bzw. t_{i-1} kann in die Berechnung des Produkts integriert werden). Gehen Sie dabei analog zu der Abschätzung für die Berechnung des ggT vor. (30)

(2) Beweisen Sie die Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big)$$

für die Fibonacci-Zahlen! (10)

(3) (a) **Programmieraufgabe:** Implementieren Sie den Euklidischen Algorithmus für Polynome in Magma, einmal ohne und einmal mit Normalisierung. Geben Sie dabei jeweils die Zwischenergebnisse r_i auf den Bildschirm aus (`print` oder `printf`).

(Sie können dabei entweder Ihre eigenen Funktionen für Polynome in Form von Sequences verwenden oder die Polynome von Magma. Den Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ erzeugen Sie mittels `Qx<x> := PolynomialRing(Rationals());`.)

(b) Wenden Sie beide Funktionen auf einige zufällig gewählte Testpolynome vom Grad 10 bzw. 20 an und interpretieren Sie Ihre Beobachtungen hinsichtlich der Zwischenergebnisse. (`Qx![Random(-10,10) : i in [0..`n`]]` liefert ein solches Polynom vom Grad n, wenn `Qx` wie in (a) definiert ist.) Vergleichen Sie die Laufzeiten (`time` …) für Polynome vom Grad 100 (ohne Ausgabe der Zwischenergebnisse). (25+15)

(4) Sei R ein euklidischer Ring und seien $a, b, c, d \in R$.

(a) Zeigen Sie: $\operatorname{ggT}(a, bc) \mid \operatorname{ggT}(a, b) \cdot \operatorname{ggT}(a, c)$.

(b) Es gelte $b, d \neq 0$ und $\operatorname{ggT}(a, b) = \operatorname{ggT}(c, d) = 1$.
Wir setzen $b' = b/\operatorname{ggT}(b, d)$, $d' = d/\operatorname{ggT}(b, d)$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{ggT}(ad' + b'c, \operatorname{kgV}(b, d)) = \operatorname{ggT}(ad' + b'c, \operatorname{ggT}(b, d))\,.$$ (10+10)