Einführung in die Algebra

Letztes Übungsblatt

Sommersemester 2018

Michael Stoll

3. Juli 2018

Abgabe:
Mittwoch, 11. Juli, bis 11:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und sei k ein Körper mit $\operatorname{char}(k) \nmid n$, der eine primitive n-te Einheitswurzel ζ enthält. Sei weiter $a \in k$, K der Zerfällungskörper von $X^n - a$ und $\alpha \in K$ mit $\alpha^n = a$. Zeigen Sie:

(a) $K = k(\alpha)$.

(b) Die Abbildung

$$\psi\colon \operatorname{Gal}(K/k) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \gamma \longmapsto [m] \quad \text{mit } \gamma(\alpha) = \zeta^m \alpha$$

ist ein wohldefinierter und injektiver Gruppenhomomorphismus. (Dabei ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine additive Gruppe.)

(c) $\operatorname{Gal}(K/k)$ ist zyklisch und $\#\operatorname{Gal}(K/k) \mid n$ (10+20+10)

(2) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und sei k ein Körper mit $\operatorname{char}(k) \nmid n$, der eine primitive n-te Einheitswurzel ζ enthält. Sei $k \subset K$ eine Galois-Erweiterung mit $\operatorname{Gal}(K/k) = \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Das Minimalpolynom von σ als k-linearer Endomorphismus von K ist ein Teiler von $x^n - 1$, aber kein Teiler von $x^d - 1$ für einen echten Teiler d von n.

(b) Sind $\lambda, \mu \in k$ Eigenwerte von σ, dann sind auch λ^{-1} und $\lambda\mu$ Eigenwerte von σ.

(c) σ hat eine primitive n-te Einheitswurzel ζ als Eigenwert, und die Eigenwerte von σ sind $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$, jeweils mit Vielfachheit 1.

(d) Sei $0 \neq \alpha \in K$ ein Eigenvektor von σ zum Eigenwert ζ.
Dann ist $(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$ eine k-Basis von K, und $K = k(\alpha)$.

(e) $a = \alpha^n \in k$ und K ist der Zerfällungskörper von $X^n - a$ über k.
(10+10+20+10+10)

(3) Bonus Problem.
Let $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$. Show that $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$ is a Galois extension of $\mathbb{Q}$ and that $\phi\colon \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \{\pm 1\}^n$, $\gamma \mapsto \left(\frac{\gamma(\sqrt{a_j})}{\sqrt{a_j}}\right)_{1 \leq j \leq n}$, is an injective group homomorphism.
(25 extra points)