Einführung in die Algebra

Übungsblatt 7

Sommersemester 2018

Michael Stoll

22. Mai 2018

Abgabe:
Mittwoch, 30. Mai, bis 11:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt! —
Schnellhefter und **Deckblatt** nicht vergessen!

(1) Zeigen Sie (anhand eines Gegenbeispiels), dass folgende Aussage falsch ist:
Seien $k \subset K_1 \subset K_2 \subset K$ sowie $k \subset L \subset K$ Zwischenkörper.
Dann ist $[K_2 \cap L : K_1 \cap L] \le [K_2 : K_1]$.
Hinweis: Schauen Sie die früheren Übungsblätter noch einmal an! (25)

(2) Sei $\mathbb{F}_q \subset F$ eine Körpererweiterung und sei $\alpha \in F$ algebraisch über $\mathbb{F}_q$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt Zwischenkörper $\mathbb{F}_q = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n \subset F$ mit $\alpha \in K_n$ und $[K_m : K_{m-1}] = 2$ für alle $m \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) $[\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = 2^\nu$ für ein $\nu \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. (25)

(3) Geben Sie eine Konstruktion des regulären Fünfecks an (mit Beweis).
Hinweis: Finden Sie einen algebraischen Ausdruck für $\cos \frac{2\pi}{5}$. (25)

(4) Sei $P = \{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \text{das reguläre } n\text{-Eck ist konstruierbar}\}$. (Dabei seien $1, 2 \in P$.) Zeigen Sie:

(a) Ist $n \in P$ und d ein Teiler von n, dann ist $d \in P$.

(b) Sind m und n teilerfremd und beide in P, dann ist $mn \in P$. (10+15)

(5) Bonus Problem.

(a) Let p be a prime number. Show that $f_p = X^{(p-1)p} + X^{(p-2)p} + \ldots + X^p + 1$ is irreducible in $\mathbb{Q}[X]$. Hint. Consider $f_p(X+1) \bmod p$.

(b) Let p be an odd prime number. Show that the regular p^2-gon (= p^2-Eck) cannot be constructed with ruler and compass (= Lineal und Zirkel).

(c) Show that if the regular n-gon is constructible, then $n = 2^m p_1 \ldots p_k$ with $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ and pairwise distinct Fermat primes $p_1, \ldots, p_k$. (15+10+10 extra points)