Einführung in die Algebra

Ein großer Teil der Korrektorenstellen und ein Teil der Übungsgruppen wird aus Studienbeiträgen finanziert.

Pfingst-Übungsblatt

SOMMERSEMESTER 2013

MICHAEL STOLL

13. Mai 2013

Abgabe: **Montag, 27. Mai**, bis 10:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Alle Punkte auf diesem Blatt sind Extra-Punkte!

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt!

(1) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass es im Allgemeinen nicht stimmt, dass eine beliebige Transposition und ein beliebiger n-Zykel die S_n erzeugen. (20)

(2) [Staatsexamen Herbst 2011]
Sei $n \geq 5$. Man bestimme alle Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_n. Dabei darf (und sollte) ohne Beweis benutzt werden, dass für $n \geq 5$ die alternierende Gruppe A_n einfach ist. (20)

(3) [Staatsexamen Herbst 2011]
Sei G eine endliche Gruppe und sei $n \geq 1$ mit $\operatorname{ggT}(n, \#G) = 1$. Zeigen Sie, dass es zu jedem Element $a \in G$ ein eindeutig bestimmtes Element $b \in G$ gibt mit $b^n = a$. (20)

(4) [Staatsexamen Frühjahr 2011]
Sei G eine endliche Gruppe. Es seien $a, b, c \in G$ mit folgenden Eigenschaften: Die Gruppe G wird von $\{a, b, c\}$ erzeugt, das Element a erzeugt das Zentrum von G, und es gilt

$$bcb^{-1}c^{-1} = a\,.$$

(a) Berechnen Sie $b^n c b^{-n} c^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(a) \mid \operatorname{ord}(b)$.

(c) Zeigen Sie, dass $b^{\operatorname{ord}(a)}$ im Zentrum von G liegt.

(d) Folgern Sie hieraus $\operatorname{ord}(b) \mid (\operatorname{ord}(a))^2$. (10+10+10+10)

(5) (a) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie: Ist $G/Z(G)$ zyklisch, dann ist G abelsch (und damit $G = Z(G)$, also $G/Z(G)$ trivial).

HINWEIS: Sei $a \in G$, sodass das Bild von a den Quotienten $G/Z(G)$ erzeugt. Dann hat jedes $g \in G$ die Form $a^n z$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in Z(G)$.

(b) [Staatsexamen Herbst 2010]
Die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(G)$ einer Gruppe sei zyklisch. Zeigen Sie, dass G abelsch ist. (15+15)