Einführung in die Algebra

Ein großer Teil der Korrektorenstellen und ein Teil der Übungsgruppen wird aus Studienbeiträgen finanziert.

Übungsblatt 5

SOMMERSEMESTER 2013

MICHAEL STOLL

13. Mai 2013

Abgabe: **Donnerstag(!), 23. Mai**, bis 12:00 Uhr im Briefkasten (NW II, 2. Stockwerk rechts).

Übungsaufgaben bitte **handschriftlich** bearbeiten; nur ein Name pro Blatt!

(1) Sei $\sigma \in S_n$ mit $\sigma = \zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_m$, wobei $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ paarweise disjunkte Zykel der Längen $\ell_1, \ldots, \ell_m$ sind. Zeigen Sie, dass σ Ordnung $\operatorname{kgV}(\ell_1, \ldots, \ell_m)$ hat. (20)

(2) Geben Sie alle Zykeltypen an und dazu die Anzahl der zugehörigen Elemente, ihr Signum und ihre Ordnung

a) für S_5, b) für S_6. (15+15)

(3) Bestimmen Sie alle Untergruppen der alternierenden Gruppe A_4.
Welche davon sind Normalteiler? (20)

(4) Sei $\phi \in \operatorname{Aut}(S_n)$ ein Automorphismus der S_n. Zeigen Sie:

(a) Haben $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ denselben Zykeltyp, dann haben auch $\phi(\sigma_1)$ und $\phi(\sigma_2)$ denselben Zykeltyp.

(b) Es gebe eine Transposition $\tau \in S_n$, sodass $\phi(\tau)$ ebenfalls eine Transposition ist. Dann ist ϕ ein innerer Automorphismus.

HINWEIS: Zeigen Sie zunächst (unter Verwendung von a)), dass es $\sigma \in S_n$ gibt mit $\phi\big((i\ j)\big) = \big(\sigma(i)\ \sigma(j)\big)$ für alle $i < j$. (10+20)

(5) BONUS PROBLEM.

(a) Let $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $n \neq 6$. Show that no other cycle type in S_n has the same number of elements as the transpositions. Conclude that $\operatorname{Aut}(S_n) = \operatorname{Inn}(S_n)$.

(b) Find an automorphism ϕ_0 of S_6 with $\phi_0 \notin \operatorname{Inn}(S_6)$ and show that the outer automorphism group $\operatorname{Out}(S_6)$ has order 2. (15+15 extra points)