Diophantische Gleichungen

Letztes Übungsblatt

Wintersemester 2018/19

Michael Stoll

31. Januar 2019

(1) Hier lösen wir die Gleichung aus Beispiel 10.11, indem wir über $\mathbb{Z}_p[\theta]$ arbeiten für eine Primzahl p (mit $p \nmid \operatorname{disc}(f)$), sodass $f \bmod p$ nicht in Linearfaktoren zerfällt (aber quadratfrei ist). Wir arbeiten mit $p = 5$.

(a) Zeigen Sie, dass $\varepsilon^8 \equiv 1 \bmod 5$ ist in $\mathbb{Z}[\theta]$.

(b) Berechnen Sie $\lambda \in \mathbb{Z}_5[\theta]$ modulo 5^2, wobei $\log(\varepsilon^8) = 5\lambda$ ist.

(c) Bestimmen Sie die ersten drei Terme der Potenzreihe $\exp(5\lambda t)$ (die Koeffizienten sollen als Linearkombination von 1, θ und θ^2 angegeben werden, mit 5-adischer Genauigkeit wie sich aus (b) ergibt.)

(d) Für $j = 1, 2, 3$ und $n_0 = 0, 1, \ldots, 7$ betrachten Sie die Reihen

$$\phi_{j,n_0}(t) = \gamma_j \varepsilon^{n_0} \exp(5\lambda t)$$

und schreiben Sie

$$\phi_{j,n_0}(t) = \phi_{j,n_0,0}(t) + \phi_{j,n_0,1}(t)\theta + \phi_{j,n_0,2}(t)\theta^2$$

mit $\phi_{j,n_0,i} \in \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$. Die Bedingung für eine Lösung ist dann, dass $\phi_{j,n_0,2}(t) = 0$ ist.

(e) Wenden Sie auf jede der Reihen $\phi_{j,n_0,2}(t)$ Satz 10.1 an, um Schranken für die Anzahl der Lösungen zu bekommen.

(f) Falls nötig, schließen Sie verbleibende Möglichkeiten durch Betrachtung modulo einer anderen Primzahl q aus.

(2) Lösen Sie die Thue-Gleichung

$$x^3 + 2y^3 = 1\,.$$

(Sie können mit $p = 31$ arbeiten wie in der Vorlesung oder mit $p = 5$ wie in Aufgabe (1).)