Diophantische Gleichungen

Übungsblatt 10

Wintersemester 2018/19

Michael Stoll

10. Januar 2019

(1) Bestimmen Sie die Grundlösungen der Pellschen Gleichung für $d = 29$ und $d = 61$.

(2) Sei $d > 0$ ungerade, kein Quadrat, und seien p, q teilerfremd mit $p^2 - dq^2 = \pm 4$. Zeigen Sie, dass man durch „Verdreifachung“ von (p, q) eine Lösung der Pellschen Gleichung $x^2 - dy^2 = \pm 1$ bekommt.

(3) Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die Kettenbruchentwicklung von α abbricht: Für ein $n \geq 0$ ist $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, damit $a_n = \alpha_n$, und α_{n+1} ist nicht definiert. Zeigen Sie auch, dass dann $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ gilt.

(4) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und sei $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ die Kettenbruchentwicklung von α. Zeigen Sie:

$$\inf\left\{c > 0 \;\middle|\; \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_{>0} \colon \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^2}\right\} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup\{a_n \mid n \geq 0\} < \infty\,.$$

(5) Bonus Problem. (Bundeswettbewerb Mathematik, 1. Runde 2019)
Consider the decimal expansion $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$. Assume that there are k successive zeros somewhere in this expansion. Show that there must be at least k digits between the dot and the first of these zeros.