# Diophantische Gleichungen

## Übungsblatt 7

WINTERSEMESTER 2018/19

MICHAEL STOLL

6. Dezember 2018

(1) Seien $F(x, y)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, $p$ eine Primzahl, und außerdem $(a, b) \in \mathbb{F}_p^2$ mit $F(a, b) = 0$ und $\nabla F(a, b) \neq (0, 0)$ (das ist der Gradient von $F$, also der Vektor der ersten partiellen Ableitungen: $(a, b)$ ist ein glatter Punkt auf der Kurve $F(x, y) = 0$ über $\mathbb{F}_p$). Zeigen Sie, dass es dann $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_p^2$ gibt mit $F(\alpha, \beta) = 0$.

(2) Verifizieren Sie die Aussage von Lemma 8.7 (mit möglichst wenig Aufwand).

(3) Zeigen Sie:

*$a \in \mathbb{Q}^\times$ ist genau dann ein Quadrat, wenn $a$ ein Quadrat in $\mathbb{Q}_p$ ist für alle bis auf endlich viele Primzahlen $p$.*

HINWEIS: Quadratisches Reziprozitätsgesetz, Satz 8.10.

(4) Zeigen Sie:

*Eine nicht-ausgeartete quadratische Form $Q$ in fünf Variablen hat stets nichttriviale Nullstellen in $\mathbb{Q}_p$, für jede Primzahl $p$.*

HINWEISE: Diagonalisieren, Skalieren, Lemma 8.2. $p = 2$ muss separat behandelt werden.

(5) BONUS PROBLEM.

Let $p$ be an odd prime number. Show that $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ is a $p$th power in $\mathbb{Z}_p$ if and only if $p^2 \mid a^{p-1} - 1$.