Diophantische Gleichungen

Übungsblatt 3

Wintersemester 2018/19

Michael Stoll

8. November 2018

(1) Das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist $V_n = \pi^{n/2}/(\frac{n}{2})!$ (dabei ist $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$, und die Rekursion $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ gilt auch für halbganze Zahlen). Benutzen Sie den Satz von Minkowski, um das folgende Resultat zu zeigen:

Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter. Dann enthält Λ einen Vektor $\boldsymbol{x} \neq 0$ der Länge

$$|\boldsymbol{x}| \le \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt[n]{\Big(\frac{n}{2}\Big)!}\, \sqrt[n]{\Delta(\Lambda)}\,.$$

(2) Beweisen Sie folgende Äquivalenzen für Primzahlen p:

(a) $\exists x, y \in \mathbb{Z}\colon p = x^2 + 2y^2 \iff p = 2$ oder $p \equiv 1$ oder $3 \bmod 8$.

(b) $\exists x, y \in \mathbb{Z}\colon p = x^2 + 3y^2 \iff p = 3$ oder $p \equiv 1 \bmod 3$.

(c) $\exists x, y \in \mathbb{Z}\colon p = x^2 + 5y^2 \iff p = 5$ oder $p \equiv 1$ oder $9 \bmod 20$.

Hinweise: (i) „Gitter-Beweis" des Zwei-Quadrate-Satzes. (ii) Es kann sein, dass die Kreisscheibe „zu groß" ist; dann müssen die verbleibenden Fälle noch ausgeschlossen werden (Betrachtung mod 3 oder mod 5).

(3) Zeigen Sie (mithilfe des 3-Quadrate-Satzes 5.9):

$$\{x^2 + y^2 + z^2 + z \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}_{\ge 0}\,.$$

(4) Seien $a \le b \le c$ positive ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass nicht jede positive ganze Zahl n in der Form

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2$$

mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden kann.

(5) Bonus Problem.

Let $m > 4$ be an integer such that $2m + 1$ is prime. Show that the only solution in integers of

$$x^m + 2y^m = 5z^m$$

is the trivial one, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

(Bitte wenden!)

(6) Seien $n \geq 1$ und $u \in \mathbb{Z}$ mit $u^2 \equiv -1 \bmod n$.
Wir definieren $\Lambda_{n,u} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \equiv uy \bmod n\}$. Zeigen Sie:

(a) $\Lambda_{n,u}$ ist ein Gitter mit Kovolumen n.

(b) $\Lambda_{n,u}$ ist invariant unter Drehung um 90°: $(x, y) \mapsto (-y, x)$.

(c) $\Lambda_{n,u}$ enthält genau vier Elemente (x, y) mit $x^2 + y^2 = n$.

Hinweis für (c): Ist $(x, y) \in \Lambda_{n,u}$ mit $x^2 + y^2 = n$ (Existenz mit Minkowski), dann ist $(x, y), (-y, x)$ eine Gitterbasis von $\Lambda_{n,u}$.

(7) Für $n \geq 1$ sei $U_n = \{\bar{u} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \bar{u}^2 = -\bar{1}\}$ und

$$X_n^* = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \mathrm{ggT}(x, y, n) = 1, x^2 + y^2 = n\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $f\colon X_n^* \to U_n, (x, y) \mapsto \bar{x}\bar{y}^{-1}$ eine wohldefinierte Abbildung ist, und dass $\#f^{-1}(\bar{u}) = 4$ ist für alle $\bar{u} \in U_n$. Folgern Sie $\#X_n^* = 4\#U_n$.

Hinweis: Aufgabe (6).

(8) Sei $\chi\colon \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ definiert durch $\chi(2m) = 0$ und $\chi(2m + 1) = (-1)^m$. Zeigen Sie für $4 \nmid n$:

$$\#X_n^* = 4\#U_n = 4\prod_{p|n}\bigl(1 + \chi(p)\bigr)\,.$$

Hinweis: Chinesischer Restsatz.

Zusatzaufgabe:

Sei $X_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$. Zeigen Sie

$$R_2(n) := \#X_n = \sum_{m^2|n} \#X_{n/m^2}^* = 4\sum_{d|n}\chi(d)\,.$$