M. Krämer Wintersemester 2004/05

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 13

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Gradient und Hessematrix für folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1: &\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \quad \mapsto 3xy + 5y^2 + 2 \\ f_2: &\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \quad \mapsto \sin(xy) \\ f_1: &\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad (x,y,z) \mapsto x \cdot \sin(yz) - e^{x^2+z} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Gradient und Hessematrix von (vgl. Aufgabe 4 vom letzten Übungsblatt):

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + y^4 \,.$$

Zeigen Sie, dass die Hessematrix am Punkt $(0,0)$ indefinit ist.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^3 + 3x^2y + 3y^2x - 3x$$

Aufgabe 4

Eine Firma stellt aus den Produktionsfaktoren a und k ein Produkt P her. Die Produktionsfunktion sei

$$x(a,k) = 20a^{\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}} \,,$$

und das Endprodukt lasse sich zum fixen Marktpreis von $p = 10$ EUR absetzen. Eine Arbeitsstunde a kostet 5 EUR, eine Einheit k des Kapitalstocks kostet 10 EUR. Welcher Faktoreinsatz maximiert den Gewinn, wenn keine weiteren Kosten anfallen? Wie hoch ist dieser?