Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 11

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen (es sei $t \in \mathbb{R}$):

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{t} & t \\ 0 & 2 & t^2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} t & 5 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2t & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 3t & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4t & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Matrizen sind positiv oder negativ definit?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Zeichnen Sie den durch die folgenden Ungleichungen beschriebenen Bereich des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 7x_2 & \leq & 70 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & \geq & 40 \\ 11x_1 & - & 18x_2 & \leq & 44 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 40 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & \geq & -50 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

und untersuchen Sie unter diesen Nebenbedingungen die Lösungen folgender linearer Optimierungsprobleme:

a) $\min f(x)$ mit $f(x) = x_1 + x_2$

b) $\max f(x)$ mit $f(x) = x_1 + x_2$

c) $\max f(x)$ mit $f(x) = 2x_1 - x_2$

d) $\min f(x)$ mit $f(x) = -3x_1 + 2x_2$

Aufgabe 4

Ein Kaufmann hat 20kg Nüsse und 30kg Rosinen zum Preis von 9EUR bzw. 5EUR je kg eingekauft. Er kann die Nüsse und Rosinen zum Preis von 12EUR bzw. 7EUR verkaufen. Er kann aber auch eine Mischung aus beiden herstellen und sie unter dem Namen „Studentenfutter" verkaufen. Der Preis dieser Mischung soll 10EUR je kg betragen. Dabei muss aber der Anteil der Nüsse mindestens 25% ausmachen. Welche Verkaufsweise ist für den Kaufmann am günstigsten?