M. Krämer Wintersemester 2004/05

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 9

Aufgabe 1

Finden Sie möglichst viele Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (mindestens 6 Stück).

Aufgabe 2

Bringen Sie folgende Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sind folgende Mengen von Vektoren linear unabhängig? Bilden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 4

a) Geben Sie für folgende Ebene im $\mathbb{R}^3$ eine Basis an:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}.$$

b) Stellen Sie einen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E$ aus der Ebene bzgl. der von Ihnen gewählten Basis dar.

Aufgabe 5

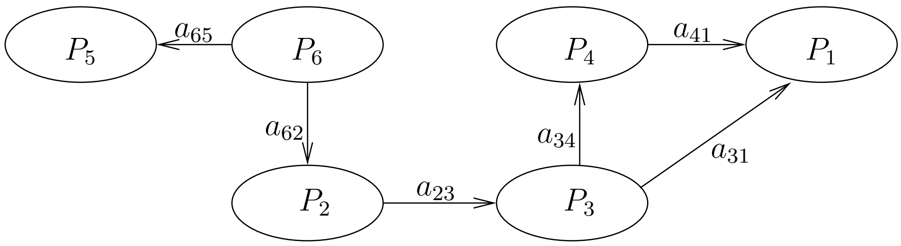
Bei genauerer Überprüfung der Angaben von Aufgabe 5 (von letzter Woche) fiel mir auf, dass da etwas nicht passen kann. Warum?

Aufgabe 6

Betrachten Sie einen Produktionsbetrieb, bei dem ein Teil der dort hergestellten Produkte wieder in die eigene Produktion eingeht (z.B. chemische Industrie). Ein solcher Betrieb stelle nun n Produkte $P_1, \ldots, P_n$ her. Zur Beschreibung des Produktionsprozesses wird die sogenannte *Eigenbedarfsmatrix* $A := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots n}$ verwendet.

Ein Eintrag a_{ij} dieser Matrix gibt dabei die Mengeneinheiten von Produkt P_i an, die zur Herstellung einer Mengeneinheit von P_j benötigt werden ($a_{ij} \geq 0$).

Die Eigenbedarfsmatrix kann durch den sogenannten *Gozintographen* (von *'goes into'*) veranschaulicht werden:



(Ein fehlender Pfeil zwischen P_i und P_j bedeutet $a_{ij} = 0$.)

Geht nun eine Bestellung über die Mengen $b_1, \ldots, b_n$ von $P_1, \ldots, P_n$ ein, so stellt sich die Aufgabe, aus der gesamten Information die tatsächlich zu produzierenden Mengen $x_1, \ldots, x_n$ von $P_1, \ldots, P_n$ zu ermitteln ($x_i, b_i \geq 0$).

a) Zeigen Sie: Mit $M := (E_n - A)$ lässt sich der Produktionsvektor x durch Lösen des Gleichungssystems $M \cdot x = b$ bestimmen.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Produktionsmenge x_i für beliebiges $1 \leq i \leq n$ der Gleichung $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i$ genügt.)

b) Es sei $n = 3$ und $A = (a_{ij})_{i,j}$ sei gegeben durch $a_{12} = 3$, $a_{13} = 14$, $a_{23} = 7$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Wieviele Produkte müssen von P_1, P_2 und P_3 hergestellt werden, wenn eine Mengeneinheit P_3 bestellt wird?

c) Es sei $n = 3$ und $A = (a_{ij})_{i,j}$ sei gegeben durch $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = \frac{1}{2}$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Ist es möglich, eine Mengeneinheit von P_1 zum Verkauf herzustellen, ohne Überschuß an P_2 und P_3 zu produzieren?