M. Krämer Wintersemester 2004/05

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler

Blatt 8

Aufgabe 1

Ein Unternehmen stellt in ihren drei Niederlassungen Amsterdam, Bayreuth und Chicago unterschiedliche Legierungen her. Dabei benötigen die einzelnen Niederlassungen jährlich folgende Mengen an Rohstoffen:

Amsterdam:	20t Wolfram, 20t Mangan, 40t Zinn;
Bayreuth:	125t Zink, 100t Mangan, 25t Nickel;
Chicago:	540t Kupfer, 405t Zink, 270t Wolfram, 135t Nickel;

Die Rohstoffkosten (in 1000$/t) betragen dabei:

Kupfer: 30, Zink: 10, Wolfram: 500, Nickel: 120, Mangan: 25, Zinn: 280

Stellen Sie den Jahresverbrauch der Unternehmen in einer geeigneten Matrix dar. Wieviel Dollar geben die Niederlassungen im betrachteten Jahr für Rohstoffe aus? Wie hoch sind die Rohstoffausgaben des ganzen Unternehmens?

Aufgabe 2

a) Geben Sie den Abstand zwischen folgenden Punkten im $\mathbb{R}^3$ an:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie A^t für folgende Matrix. Ist A symmetrisch?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

d) Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 7 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Lösung X folgender Matrixgleichung (falls eine existiert):

$$\frac{1}{2}(A - (B + X - C)) = A\,.$$

Aufgabe 3

Welche Matrizen A und B folgender Dimensionen kann man multiplizieren? Geben Sie gegebenenfalls die Dimension des Produkts an:

A	B	$A \cdot B$	$B \cdot A$
$\mathbb{R}^{2\times 4}$	$\mathbb{R}^{2\times 4}$	?	?
$\mathbb{R}^{2\times 4}$	$\mathbb{R}^{4\times 2}$	?	?
$\mathbb{R}^{2\times 4}$	$\mathbb{R}^{5\times 5}$	?	?
$\mathbb{R}^{2\times 4}$	$\mathbb{R}^{1\times 4}$	?	?

Aufgabe 4

Eine $(n, m)-$Matrix A nennt man stochastisch, wenn die Summe der Einträge in jeder Spalte jeweils 1 ergibt (Die Einträge geben dann Wahrscheinlichkeiten oder prozentuale Zusammenhänge wieder). Ebenso heißt ein n-Tupel stochastisch, wenn die Summe der Einträge genau 1 beträgt.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 & 1 \\ 0.6 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen sie $C := A \cdot b$. Überprüfen Sie, dass auch C stochastisch ist.

b) Ist das Produkt einer stochastischen Matrix mit einem stochastischen Tupel immer stochastisch?

c) Wie sieht es mit dem Produkt zweier stochastischer Matrizen A und B aus?

Aufgabe 5

Das Unternehmen aus Aufgabe 1 stellt in jeder ihrer Niederlassung aus den Rohstoffen jeweils eine Legierung her. Geben Sie in einer stochastischen Matrix die Zusammensetzungen der Legierungen L_A, L_B und L_C an.

Diese Legierungen werden schließlich in zwei unterschiedlichen Mischungsverhältnissen auf dem Markt angeboten:

	P_1	P_2
L_A	5%	10%
L_B	15%	20%
L_C	80%	70%

Geben Sie die Zusammensetzungen der Endprodukte (bzgl. der Rohstoffe) an.