8 Lineare Optimierung

8.1 Lineare Optimierung in der Dimension 2

Zum Einüben in die Problematik behandeln wir explizit zunächst ein Optimierungsproblem in der Dimension 2 .

8.1.1 Ein konkretes Musterproblem in der Dimension 2

Eine Firma stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her. Zur Fertigung werden vier Maschinen gebraucht, die zur Herstellung einer Einheit von P_1 bzw. von P_2 jeweils verschieden lang benutzt werden. Die Maschinen selbst haben in einer Produktionsperiode beschränkte Kapazitäten (an Benutzungsdauer). Konkrete Daten:

Maschine	Benutzungsdauer in Stunden zur Herstellung einer Einheit von		Maschinenkapazität in Stunden
	P_1	P_2	
A	2	3	180
B	2	1,5	150
C	0	3	120
D	2	0	190

Eine Mengeneinheit des Produktes P_1 bzw. P_2 bringt 200 bzw. 500 Euro Gewinn.Vom Produkt P_1 sollen x_1 Einheiten, vom Produkt P_2 sollen x_2 Einheiten produziert werden.
Frage: Wie muß die Produktion auf P_1 und P_2 verteilt werden, so daß bei Berücksichtigung der Kapazitäten der Gewinn maximiert wird?

Mathematische Formulierung (Modellbildung):

Maximiere die Funktion

$$Z(x_1, x_2) = 200x_1 + 500x_2 \qquad (1)$$

– die sog. Zielfunktion – wobei nur solche x_1, x_2 zur Konkurrenz zugelassen werden, welche folgende "Restriktionen" erfüllen:

$$\left.\begin{array}{llrcl}
\text{Kapazität von } A \longrightarrow & (i) & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 180 \\
\text{Kapazität von } B \longrightarrow & (ii) & 2x_1 + 1,5x_2 & \leq & 150 \\
\text{Kapazität von } C \longrightarrow & (iii) & 3x_2 & \leq & 120 \\
\text{Kapazität von } D \longrightarrow & (iv) & 2x_1 & \leq & 190
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{(LUG)}\\ \text{(Lineare Ungleichungen)}\end{array}$$

$$\text{und} \qquad \text{(v)} \qquad x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 \qquad \begin{array}{c}\text{(NN)}\\ \text{(Nichtnegativitäts-Bedingungen)}\end{array}$$

Bezeichnung:

Die Menge $\{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x$ erfüllt (i) – (v) $\} =: K$ heißt der **zulässige Bereich** des Problems, ein $x \in K$ heißt **zulässig**.

8.1.2 Beschreibung des zulässigen Bereiches

Erinnere (Tats.2 in 6.3.1): Die Lösungsmenge der Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$, α und β nicht beide 0 , ist eine Gerade G im $\mathbb{R}^2$.

Tatsache und **Bezeichnung**:
Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, α und β nicht beide 0 . Dann:

(1) Die Lösungsmengen der linearen Ungleichungen

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \leq \gamma \qquad \text{und} \qquad \alpha x_1 + \beta x_2 \geq \gamma$$

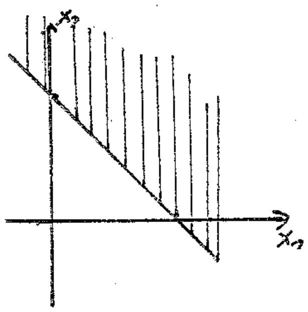
sind die beiden **Halbebenen**, in welche die Ebene $\mathbb{R}^2$ durch die Gerade G geteilt wird. Dabei: Die Gerade G , also die Punktmenge, wo die Gleichheit statt einer der beiden Ungleichungen gilt, gehört zu beiden Halbebenen. Oder so formuliert: Mit Halbebene ist die Halbebene inklusive der begrenzenden Gerade gemeint.

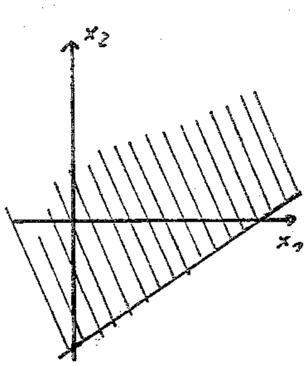
(2) Halbebenen und Durchschnitte von Halbebenen, also die simultane Lösungsmenge von mehreren linearen Ungleichungen, sind konvex.

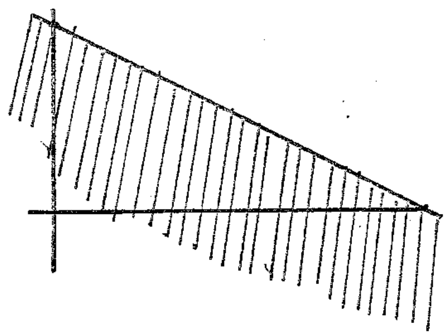
(3) Ein Durchschnitt von endlich vielen Halbebenen, der beschränkt ist, heißt ein **konvexes Polyeder**.

Beispiele von Ungleichungen mit den zugehörigen Halbebenen als Lösungsmengen:

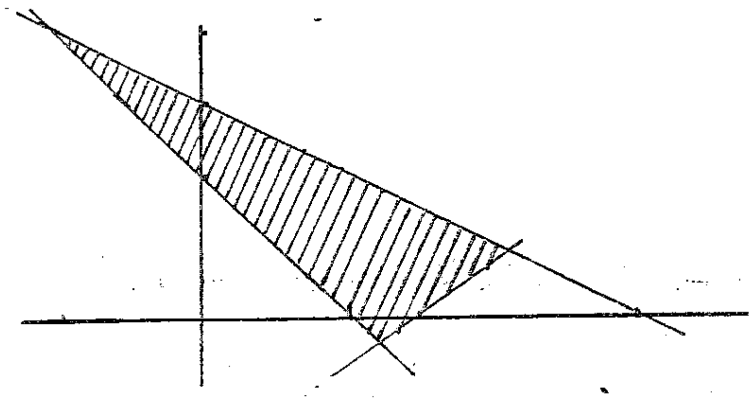
$x_1 + x_2 \geq 2$ $\qquad$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6$ $\qquad$ $x_1 + 2x_2 \leq 6$







Die simultane Lösungsmenge (in diesem Fall ein Dreieck; ein konvexes Fünfeck ergibt sich z.B. unten bei der zulässigen Menge unseres Musterproblems) ist:



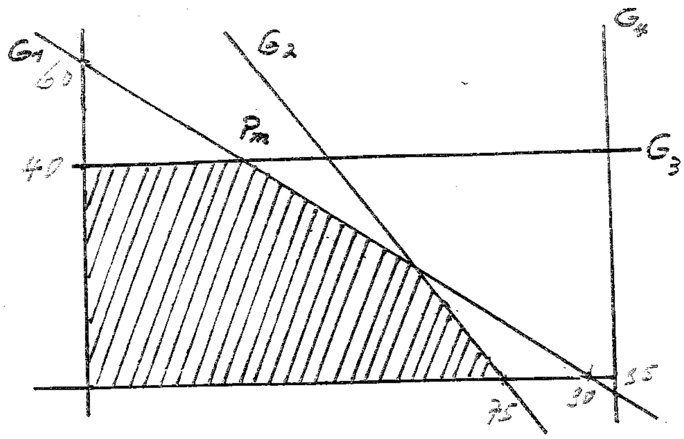
Bemerkung:
Die Geraden $G(\alpha,\beta,\gamma)$ definiert durch $\alpha x_1 + \beta x_2 \leq \gamma$ lasssen sich leicht zeichnen.
Ist $\alpha = 0$ (und somit $\beta \neq 0$), so ist $G(\alpha,\beta,\gamma)$ die Parallele zur x-Achse durch den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\gamma}{\beta} \end{pmatrix}$

Ist $\beta = 0$ (und $\alpha \neq 0$), so ist $G(\alpha,\beta,\gamma)$ die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$

Im Falle $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ kann man so vorgehen: Durch Nullsetzen von x_1 bzw. x_2 und Auflösen der Geradengleichung nach der anderen Koordinate erhält man die beiden Punkte $(\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$ und $(0, \frac{\gamma}{\beta})$. Die Gerade $G(\alpha,\beta,\gamma)$ ist dann die Gerade durch diese beiden Punkte.

Welche der beiden Halbebenen durch die jeweilige Ungleichung beschrieben wird, kann man durch Einsetzen eines Punktes außerhalb der Geraden bestimmen, am einfachsten durch Einsetzen von $\binom{0}{0}$, wenn die Gerade nicht durch den Nullpunkt geht. Im ersten Beispiel etwa ist $0 \leq 2$, d.h. die Halbebene enthält den Nullpunkt nicht. Die beiden anderen Halbebenen enthalten $\binom{0}{0}$.

Der zulässige Bereich beim konkreten Problem aus 8.1.1 :



Die Geraden G_1, G_2, G_3, G_4 entsprechen den durch (i), (ii), (iii), (iv) definierten Gleichungen.

Der Nullpunkt liegt in allen Halbebenen.
Die Nichtnegativitätsbedingungen bewirken, daß K im positiven Quadranten liegt.
In diesem Beispiel liefert (iv) keine zusätzliche Einschränkung.

8.1.3 Eine graphische Lösung

Diskussion der Zielfunktion:

Bemerkung
Betrachte die Zielfunktion $Z(x) = a_1x_1 + a_2x_2$, in unserem Beispiel $Z(x) = 200x_1 + 500x_2$.
Für variierende Werte von $c \in \mathbb{R}$ werden durch die Gleichungen $Z(x) = c$ parallele Geraden G_c definiert.
Name: Die Geraden G_c heißen **Isogewinngeraden** (Geraden gleichen Gewinns).
Ist $c > 0$, so bedeutet Parallelverschiebung von G_c in Richtung Nullpunkt den Übergang zu kleineren Werten der Zielfunktion. Parallelverschiebung weg vom Nullpunkt führt zu G_c's, welche größeren Werten von $Z(x)$ entsprechen. Das führt zu:

Graphisch-experimentelle Methode zur Bestimmung des Maximums bzw. Minimums der Zielfunktion auf K:

Zeichne eine Gerade $G_{c_0},\ c_0 > 0$, definiert durch $Z(x) = c_0$.

Zur Maximumbestimmung: Verschiebe C_{c_0} parallel bis zu derjenigen Geraden G_c, welche von allen Geraden, die K treffen, am weitesten vom Nullpunkt entfernt ist. Dieses c ist dann das Maximum von Z auf K, und die Schnittpunkte von G_c mit K sind die Maximalstellen. I.a. wird dies eine einzelne Ecke sein, das ist der Schnittpunkt zweier begrenzenden Geraden (siehe 8.2.3).

Zur Minimumbestimmung verschiebt man parallel bis zu derjenigen Geraden G_c, die unter allen zu G_{c_0} parallelen Geraden, welche K treffen, dem Nullpunkt am nächsten liegt.

Hat man eine Ecke als Extremalstelle gefunden, so bestimmt man ihre Koordinaten, indem man den entsprechenden Geradenschnittpunkt ausrechnet (als Lösung des Gleichungssystems, das aus den beiden Geradengleichungen besteht).

Anwendungen auf unser Beispiel:

Einige der G_c's sind in der Zeichnung gestrichelt angegeben. Es stellt sich heraus:
$Z(x) = 200x_1 + 500x_2$ nimmt auf K sein Maximum im Schnittpunkt P_m der Geraden G_1 und G_3 an.
Es ist $\underline{P_m = (30, 40)}$ und $\underline{Z(P_m) = 26\,000}$ das Maximum von Z.

Ergebnis unserer Aufgabe:

Die Firma erzielt ein Maximum an Gewinn, wenn sie 30 Einheiten von P_1 und 40 Einheiten von P_2 herstellt. Die Maschinen A und C sind dabei ausgelastet, weil P_m auf den Geraden G_1 und G_3

liegt. Die Maschinen B und C haben noch freie Kapazitäten (P_m liegt nicht auf den Geraden G_2 und G_4).

8.2 Einige Theorie

8.2.1 Verallgemeinerung des Problems

Mathematische Situation:

Gegeben: Ein Zeilenvektor $Z \in \mathbb{R}^{1\times n}$ und die lineare **Zielfunktion**

$$f_Z : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_1x_1 + \ldots + z_nx_n = Z\cdot x$$

Außerdem: Ein **lineares Ungleichungssystem**, gegeben durch m Zeilenvektoren $A_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $i = 1, ..., m$, m reelle Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ und – daraus gebildet – die linearen Ungleichungen

$$\begin{array}{ccccc} A_1x & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ A_2x & = & a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_mx & = & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq b_m \end{array} \qquad \text{(LUG)}$$

Schließlich noch: Die Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_i \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n \qquad \text{(NN)}$$

Bemerkung:

(i) Auch die Nichtnegativitätsbedingungen können durch das Produkt einer einzeiligen Matrix mit x ausgedrückt werden:

$$x_i \geq 0 \Longleftrightarrow \mathcal{E}_i\cdot x \geq 0 \quad (\text{wobei } \mathcal{E}_i := (0, ..., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{i}}}{1}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{1\times n}\ .$$

(ii) Auch Ungleichungen “in anderer Richtung” können in Ungleichungen des obigen Typs umgeschrieben werden: Es ist

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \geq \delta \Longleftrightarrow (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \ldots + (-c_n)x_n \leq -\delta.$$

(iii) Selbst lineare Gleichungen können in das anfängliche Ungleichungssystem integriert werden:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \delta \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leq \delta \\ \text{und} \\ (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \ldots + (-c_n)x_n \leq -\delta \end{array} \right.$$

Bezeichnung (der zulässige Bereich):

$$K := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ erfüllt (LUG) und (Nn)} \}$$

heißt der **zulässige Bereich** zu LUG und NN .

Aufgabe:

Gesucht sind das Maximum bzw. das Minimum der Einschränkung der Zielfunktion f_Z auf den zulässigen Bereich K, d.h. Werte $c_{\max} := \max\{ f_Z(x) \mid x \in K \}$ bzw. $c_{\min} := \min\{ f_Z(x) \mid x \in K \}$ und zugehörige Maximalstellen $x_{\max} \in K$ mit $f_Z(x_{\max}) = c_{\max}$ bzw. Minimalstellen $x_{\min} \in K$ mit $f_Z(x_{\min}) = c_{\min}$.

Beachte: Das K zu unserer Aufgabe kann leer sein. (D.h. die Restriktionen sind "zu restriktiv".) Es gibt dann natürlich auch keine Lösung unseres Optimierungsproblems.

8.2.2 Konvexität des zulässigen Bereiches.

Tatsache 1 (eine sehr allgemeine Feststellung)

Es sei I eine Menge und für jedes $i \in I$ sei X_i eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Sei $X = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \in X_i$ für alle $i \in I \}$ der "Durchschnitt" der X_i .
Dann ist X konvex. (Die leere Menge gilt nach Übereinkunft (und aus logischen Gründen) als konvex.)

> Der Beweis ist eine sehr einfache, aber gute Übung in Logik. Zu den Begriffen "konvex" und "Strecke" siehe 6.3.6 .
> Gegeben $x, y \in X, x \neq y$. Zu zeigen ist: Die Strecke $\overline{xy}$ zwischen x und y ist Teilmenge von X . Dazu:
> Für jedes $i \in I$ gilt: Als Elemente von X liegen x und y auch in X_i . Weil X_i konvex ist, gilt $\overline{xy} \subseteq X_i$. Weil dies für jedes i der Fall ist, folgt aus der Definition von X als Durchschnitt der X_i , daß $\overline{xy}$ auch in X liegt.

Bezeichnung 1:

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$, nicht alle $\alpha_1, ..., \alpha_n$ gleich 0 . Betrachte die linearen Ungleichungen

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \leq \beta \text{ bzw. } \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \geq \beta .$$

Der Lösungsräume

$$H_{\alpha,\beta} =: H := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \leq \beta \ (\text{bzw. } \geq \beta) \}$$

solcher Ungleichungen heißen **Halbräume** im $\mathbb{R}^n$.

Vorstellung: Im $\mathbb{R}^2$: Siehe (1) der Tatsache in 8.1.1 .
Im $\mathbb{R}^3$ sind die Halbräume die offensichtlichen "Halbräume", in welche die durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta$$

definierte Ebene den $\mathbb{R}^3$ teilt.
Im $\mathbb{R}^n$ für größeres n sind die Halbräume die entsprechenden Verallgemeinerungen.

Tatsache 2:

Halbräume sind konvex.

> Der Beweis ist eine leichte Übung (in Logik und im Abschätzen).

Tatsache 3 (Direkte Folgerung aus den Tatsachen 1 und 2):

Die Lösungsmengen linearer Ungleichungssysteme im $\mathbb{R}^n$ sind konvex.

Bezeichnung 2:

Ist K der Lösungsraum eines Systems von endlich vielen linearen Ungleichungen und ist K beschränkt, so heißt K ein **konvexes Polyeder**.

Folgerung:

In unserer Situation: Der zulässige Bereich K unseres allgemeinen Problems in 8.2.1 ist konvex. Ist K beschränkt, so ist K ein konvexes Polyeder.

K ist Lösungsmenge des Gesamtungleichungssystems (LUG) + (NN) .

8.2.3 Ecken und konvexe Polyeder

Definition (Ecken in konvexen Mengen):

Sei $K \in \mathbb{R}^n$ konvex.
Eine **Ecke** von K ist ein $x \in K$ mit folgender Eigenschaft:
Ist $\overline{yz} \subseteq K$ $(y \neq z)$ Strecke zwischen zwei Punkten von K und ist $x \in \overline{yz}$, so ist $x = y$ oder $x = z$.

Beispiele:

(i) Die (einzigen) Ecken einer Strecke $\overline{yz} \subseteq \mathbb{R}^n$ sind y und z .
(ii) Die Ecken der in 8.1.2 betrachteten ebenen Polyeder sind die “offensichtlichen” Ecken.

Grundlegend in der mathematischen Untersuchung konvexer Mengen ist der folgende Begriff.

Bezeichnung (Konvexkombinationen)

Seien $P_1, ..., P_r$ Punkte im $\mathbb{R}^n$. Eine **Konvexkombination** der P_i ist eine Linearkombination $s_1P_1 + s_2P_2 + \ldots + s_rP_r$ mit folgender Eigenschaft:

Es ist $0 \leq s_i$ für alle $i = 1, ..., r$ und es ist $\sum_{i=1}^{r} s_i = 1$. (Dann ist auch $s_i \leq 1$ für alle i .)

Beispiele:

(i) Die Punkte auf einer Strecke $\overline{yz}$ sind die Konvexkombinationen von y und z . Siehe 6.3.6 .

(ii) Sind $P_1,\ P_2,\ P_3 \in \mathbb{R}^n$ und sind $b - a,\ c - a$ linar unbhängig, so ist die Menge aller Konvexkombinationen von $P_1,\ P_2,\ P_3$ gerade das Dreieck mit den Ecken $P_1,\ P_2,\ P_3$.

8.2.4 Der Hauptsatz

Satz 1

(1) Sei K der Lösungsraum eines Systems von endlich vielen linearen Ungleichungen. Dann hat K höchstens endlich viele Ecken.

(2) Konvexe Polyeder haben mindestens eine Ecke und nach (1) endlich viele Ecken.

(3) Der zulässige Bereich K eines Optimierungsproblems wie in 8.2.1 hat, falls er nicht leer ist, mindestens eine Ecke. (Das liegt am Vorhandensein der Nichtnegativitäts-Bedingungen.)

Satz 2

Sei K ein konvexes Polyeder und seien $P_1, ..., P_r$ die Ecken von K. Dann gilt:
K ist die Menge der Konvexkombinationen der $P_1, ..., P_r$

Die Sätze 1 und 2 sind Resultate einer detaillierteren Theorie konvexer Mengen.

Der Hauptsatz

Sei $\emptyset \neq K$ der Lösungsraum eines Systems von endlich vielen linearen Ungleichungen und K habe Ecken. (Z.B. sei K der zulässige Bereich eines Problems wie in 8.2.1 .)
Sei f_Z eine lineare Zielfunktion wie bisher. Dann:

(1) Hat f_Z ein Maximum bzw. ein Minimum auf K , so wird das Maximum bzw. das Minimum in einer Ecke angenommen.
D.h. es gibt eine Ecke P von K mit $f_Z(P) \geq f_Z(x)$ für alle $x \in K$ bzw. mit $f_Z(P) \leq f_Z(x)$ für alle $x \in K$.

(2) Ist K ein konvexes Polyeder mit den Ecken $P_1, ..., P_r$, so nimmt f_Z auf K sein Maximum in einem $P \in \{ P_1, ..., P_r \}$ und sein Minimum in einem $Q \in \{ P_1, ..., P_r \}$ an.

Beweis im Fall des konvexen Polyeders: Sei $M := \max\{ f_Z(P_1), ..., f_Z(P_r) \}$ und $N := \min\{ f_Z(P_1), ..., f_Z(P_r \}$ und sei $x \in K$. Nach dem Satz 2 ist x Konvexkombination der $P_1, ..., P_r$. Es gibt also $0 \leq s_1, ..., s_r \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{r} s_i = 1$ und mit $x = \sum_{i=1}^{r} s_i P_i$.
Es ist dann

$$f_Z(x) = \sum_{i=1}^{r} s_i f_Z(P_i) \leq \sum_{i=1}^{r} s_i M = (\sum_{i=1}^{r} s_i) M = 1 \cdot M = M \text{ und}$$
$$f_Z(x) = \sum_{i=1}^{r} s_i f_Z(P_i) \geq \sum_{i=1}^{r} s_i N = (\sum_{i=1}^{r} s_i) N = 1 \cdot N = N \, .$$

Anmerkung:
Der Satz und der Hauptsatz legen ein erstes Verfahren zur Bestimmung von Maximum und Maximalstelle bzw. von Minimum und Minimalstelle eines f_Z auf einem konvexen Polyeder K nahe: Man bestimme erst die Ecken $P_1, ..., P_r$ von K, dann eine Ecke P mit dem Maximalwert M

und eine Ecke Q mit dem Minimalwert N von f_Z auf $\{ P_1, ..., P_r \}$.
Das Verfahren stellt sich im Fall von Lösungsmengen K von linaren Ungleichungssystemen aus sehr vielen Ungleichungen als zu aufwendig heraus. In jedem Fall, auch zum Zwecke besserer Verfahren, muß man die Ecken von K genauer kennen.

8.2.5 Charakterisierung der Ecken. Kanten

Tatsache 1 (Charakterisierung der Ecken)
Seien $A_1, , A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{1\times n}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Dazu betrachte man das lineare Ungleichungssystem

$$(*) \qquad A_i x \leq b_i \ , \quad i = 1, .., k \ .$$

Sei K die Lösungsmenge von $(*)$. Sei $P \in K$. Dann gilt:

$$P \text{ ist Ecke von } K \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Es gibt } n \text{ Indizes } 1 \leq i_1, i_2, .., i_n \leq k \text{, so daß} \\ \text{(i) die } A_{i_1}, , A_{i_2}, \ldots, A_{i_n} \text{ linear unabhängig} \\ \quad \text{sind und} \\ (ii) \ P \text{ der eindeutig bestimmte Lösungspunkt} \\ \quad \text{des LGS } A_{i_j} x = b_i, j = 1, ..., n, \text{ ist} \end{cases}$$

<u>Erinnere</u>: Weil die $A_{i_1}, , A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ linear unabhängig sind, ist die Koeffizientenmatrix des LGS $A_{i_j} x = b_i, j = 1, ..., n,$ invertierbar und die Lösung ist eindeutig, d.h. ein einzelner Punkt P.

<u>Anmerkung</u>
Das in der Anmerkung in 8.2.4 zuvor angedachte Verfahren könnte mit dieser Charakterisierung der Ecken durchgeführt werden. Man kann hier aber den übergroßen Aufwand erkennen. Z.B. bei 10 Variablen und 20 linearen Ungleichungen müßte man $\binom{20}{10} = 184756$ Systeme von 10-Tupel auf lineare Unabhängigkeit prüfen und bei jeder gefundenen Basis noch testen, ob die Lösungspunkte die anderen Ungleichungen erfüllen.

Im Folgenden werden wir ein Verfahren, das Simplexverfahren, skizzieren, das – ähnlich wie das Gaußverfahren – mit erstaunlich wenig Aufwand die optimalen Ecken findet. Zuerst noch:

Bezeichnung (benachbarte Kanten)
Sei

$$(*) \qquad A_i x \leq b_i \ , \quad i = 1, .., k \ .$$

ein lineares Ungleichungssystem wie in Tatsache 1 mit Lösungsmenge K. Sei eine Teilfolge $A_{i_1}, , A_{i_2}, \ldots, A_{i_{n+1}}$ der $A_i, i = 1, ..., k$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Sowohl die $A_{i_1}, , A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ als auch die $A_{i_1}, , A_{i_2}, \ldots, A_{i_{n-1}}, A_{i_{n+1}}$ sind linear unabhängig.

(2) Der Lösungspunkt P des linearen Gleichungssystems $A_{i_j} x = b_i, j = 1, ..., n,$ und der Lösungspunkt Q des LGS $A_{i_j} x = b_{i_j}, j = 1, ..., n-1 \, , A_{i_{n+1}} x = b_{i_{n=1}}$ seien aus K, d.h. es sind Ecken von K.

Dann: P und Q heißen **benachbarte Ecken** von K und die Strecke $\overline{PQ}$ heißt eine **Kante** von K .

8.3 Das Simplexverfahren

8.3.1 Das Standardmaximumproblem und die Schlupfvariablen

Wir gehen aus von dem Problem, wie es in 8.2.1 beschrieben ist. Das dortige (LUG)

$$A_i x \ \leq \ b_i \ , \quad i = 1, .., m \ .$$

schreiben wir in Analogie zu den linearen Gleichungssystemen kurz als Matrizenungleichung

$$(*) \qquad A \cdot x \ \leq \ b.$$

Dabei sind $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ und die Ungleichung ist “koordinatenweise” zu verstehen.

Bei den linearen Funktionen f_Z , , $Z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ schreiben wir einfach $Z(x)$ anstelle von $f_Z(x)$
In diesem Sinne:

Standard-Maximumproblem:

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b_i \geq 0$ für alle $i = 1, ..., m$ und sei $Z = (z_1 \, z_2 \, ... \, z_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.
Maximiere

$$Z(x) = z_1 x_1 + z_2 x_2 + ... + z_n z_n$$

unter den Nebenbedingungen

$$\text{(LUG)} \qquad A\,x \leq b \quad \text{und}$$

$$\text{(NN)} \qquad x_i \geq 0 \ \text{ für alle } i = 1, ..., n \ .$$

Anmerkung:
Zur Einschränkung auf lineare Ungleichungen des Typs “ $\leq$ ” vergleiche die Bemerkung in 8.2.1 .
Die Bechränkung der rechten Seite auf solche b_i mit $b_i \geq 0$ ist dagegen ein echte Einschränkung. Dadurch werden nur solche Probleme zugelassen, bei denen der Nullpunkt eine Ecke des zulässigen Bereiches ist. In diesem Fall kann das folgende Simplexverfahren sofort begonnen werden. Weil wir das Verfahren sowieso nur schematisch behandeln, wird unsere Darstellung durch diese Vereinfachung übersichtlicher und verständlicher. In der Praxis hat man Methoden, die ohne diese Einschränkung funktionieren.

Bemerkung (Schlupfvariable):
Zum Verständnis des folgenden Verfahrens sei noch folgendes aus dem theoretischen Hintergrund bemerkt. Zusätzlich zu den Anfangsvariablen $x_1, \, x_2, \, ... \, x_n$ führt man noch zu jeder Ungleichung in (LUG) eine sogenannte **Schlupfvariable** ein:

Statt der linearen Ungleichungen

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \qquad \leq \; b_i \;,\; i = 1, ..., m$$

betrachtet man das lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y_i \;=\; b_i \;,\; i = 1, ..., m$$

Aus dem Ungleichungssystem (LUG) im $\mathbb{R}^n$ ist dann ein Lineares Gleichungssystem von m Gleichungen im $\mathbb{R}^{n+m}$ geworden. (Die Unbekannten sind die $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m$.)

Ausgangsschema (Ausgangstableaux):

Vorzeile $\rightarrow$		x_1	x_2	$\cdots$	x_n	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	W	q	
Vorspalte $\searrow$	y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1		$\swarrow$ q-Spalte
	y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m		
“Zielzeile” $\rightarrow$		z_1	z_2	$\cdots$	z_n	0	0	$\cdots$	0	$0 = w$		

Dieses Ausgangstableau entspricht der Ecke **0** .
In der Vorzeile stehen die n Variablen x_j und die m Schlupfvariablen y_i . Das W – W für Wertespalte – und das q sollen an die Rolle der beiden letzten Spalten erinnern. Da sich die Vorzeile nicht ändert,kann man sie im Verlauf des Verfahrens weglassen.
In der Vorspalte stehen die y_1, ..., y_m in dieser Reihenfolge. Der Kern des Tableaus bildet die $(m, n + m)$-Matrix (AE_m), das ist die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems $(*)$ (oben, vor dem Tableau). Die ersten n Einträge in der Zielzeile sind die Koeffizienten der Zielfunktion, es folgen m Nullen. Das w in der letzten Spalte , der sogenannte Werteeintrag, ist der negative Wert der Zielfunktion an der betrachteten Ecke, am Anfang der Wert $0 = -Z(\mathbf{0})$.
Beim “Simplex-Verfahren” geht man längs ausgewählten Kanten schrittweise zu besseren benachbarten Ecken über .
In der ersten Spalte wird der “Eckentausch” dokumentiert. Im Kern des Tableaus werden “Gauß-Umformungen” vorgenommen: Es wird an gewissen Stellen “pivotiert”. (Man sucht ja gewisse Lösungen des LGS $(*)$.)

Die Tableaux zwischendurch sehen so aus: Die Einheitsspalten – die i-te Einheitsspalte heißt auch i-te Basisspalte – wandern, zumindest teilweise, von den letzten Spalten weg, die Nullen in der Zielzeile wandern mit. Mehr und mehr der Einträge in der Zielzeile werden negativ. Der Werteeintrag wird negativ und fällt ständig. In der Vorspalte erscheinen andere Unbekannte.
Die Tableaux-Einträge werden in den neuen Tableaux auch wieder a_{ij}, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n + m(!)$, z_j, $j = 1, \cdots, n + m$, $z_{n+m+1} =: w$, $b_i = 1 = 1, \cdots, m$ genannt.

Simplex-Verfahren für das Standard-Maximum-Problem:

$\boxed{0}$ Beginne mit dem Ausgangstableau.

$\boxed{1}$ Gibt es in der Zielzeile Einträge > 0? Wenn nein, gehe zu $\boxed{3}$.
Wenn ja, gehe zu $\boxed{2}$.

$\boxed{2}$ (i) Wähle eine Spalte j_0 $(1 \leq j_0 \leq n+m)$ aus, wo der Eintrag in der Zielzeile > 0 ist (i.a. ein j_0, wo dieser Eintrag am größten ist).
(Dieser Schritt bestimmt die "Kante", längs der wir die noch nicht optimale Ecke verlassen.)

(ii) Sind alle $a_{ij_0} \leq 0\,, i = 1, ..., m$, so ist der zulässige Bereich unbeschränkt. Die Zielfunktion wächst unbeschränkt und hat kein Maximum. <u>Breche das Verfahren ab</u> !

(iii) Für die positiven Einträge a_{ij_0} in der Spalte bilde die Quotienten $\frac{b_i}{a_{ij_0}} =: q_i$. Notiere die q_i in der q-Spalte rechts von der Spalte b. (Ist $a_{ij_0} \leq 0$, so bleibt die q-Spalte in der i-ten Zeile leer.)

(iv) Wähle unter den positiven q_i eines mit kleinstem Betrag. Nenne dessen Index im folgenden i_0.
(Dieser Schritt – die "Engpaß"-Bedingung – garantiert, daß wir längs der gewählten Kante das zulässige K nicht verlassen, also zu einer benachbarten Ecke gelangen.)

(v) "Pivotiere" die Spalte j_0 beim Eintrag (i_0, j_0) aus, d.h. mache die j_0-te Spalte durch erlaubte Zeilenumformungen zur i_0-ten Einheitsspalte in $\mathbb{R}^{m+1}$ (d.h. auch z_{j_0} wird zur 0 gemacht.)
Die Zeilenumformungen werden auf das ganze Tableau bis zur Spalte $n+m+1$ (d.i. die Spalte $\binom{b}{w}$) einschließlich ausgeübt.

(vi) Sehe die Spalte j_0 als neue i_0-te Basisspalte. Schreibe den Eintrag der Vorzeile in der j_0-te Spalte als Eintrag in die Zeile i_0 der Vorspalte. Gehe zu $\boxed{1}$.

$\boxed{3}$ Das Verfahren ist zu Ende. Ist w der Wert im Werteeintrag, so ist $-w$ das Maximum von Z auf K .
Sind $1 \leq i_1, \cdots, i_n \leq n+m$ die Spalten, die keine Basisspalten sind, so ist die optimale Ecke durch Gleichsetzen der Ungleichungen $i_1, \cdots, i_n$ bestimmt (die Ungleichungen $1, \cdots, n$ sind dabei die Nichtnegativitätsbedingungen $x_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$; die Ungleichungen $n+i$, $i = 1, \cdots, m$, sind die Ungleichungen aus dem LUG)).

Bestimmung der Koordinaten der optimalen Ecke:
Betrachte das Endtableau. Betrachte diejenigen x_j , die darin in der Vorspalte auftreten. Die Zeile, in der x_j steht, sei die Zeile i_j . Dann: Setze $x_j := b_{i_j}$. Die x_j , die nicht in der Vorspalte auftreten, werden 0 gesetzt. Dann:

Der resultierende Punkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist eine Ecke, wo f_Z sein Maximum $-w$ auf K hat.

Anders erklärt:
Betrachte das Endtableau und darin die Spalten 1 bis n .
Nehme die j-te Spalte, $j = 1, ..., n$.

1. Fall: Sie ist keine Basisspalte . Dann:
Setze $x_j := 0$.
2. Fall: Sie ist eine Basis-, also eine Einheitsspalte, etwa die i_j-te Einheitsspalte. Dann:
Setze $x_j := b_{i_j}$ (das x_j ist dann der Eintrag der Zeile i_j in der W-Spalte).
Das ist der Eintrag in derjenigen Zeile der Wertespalte W , in der die j-te Spalte ihre 1 hat.

Ergebnis: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit den so definierten x_j ist optimale Ecke zu dem optimalen Wert w im Endtableau (das ist der Eintrag in der "Wertestelle" unten rechts).

Unser Beispiel aus 8.2.1 :

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	w	q	
	2	3	1	0	0	0	180	60	
	2	1.5	0	1	0	0	150	100	
$i_0 = 3 \rightarrow$	0	$\boxed{3}$	0	0	1	0	120	$\boxed{40}$	$\leftarrow$ kleinstes $q_i > 0$
	2	0	0	0	0	1	190	–	
	200	$\boxed{500}$	0	0	0	0	0		
		$\uparrow$ $j_0{=}2$							

								w	q	
$i_0 = 1 \rightarrow$	y_1	$\boxed{2}$	0	1	0	-1	0	60	$\boxed{30}$	$\leftarrow$ kleinstes $q_i > 0$
	y_2	2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	90	45	
	x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	40	–	
	y_4	2	0	0	0	0	1	190	95	
		$\boxed{200}$	0	0	0	$-\frac{500}{3}$	0	$-20\,000$		
		$\uparrow$ $j_0{=}2$								

								q	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\boxed{30}$		Koordinaten des optimalen Punktes
y_2	0	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	30		
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\boxed{40}$		
y_4	0	0	-1	0	1	1	130		
	0	0	-100	0	$-\frac{200}{3}$	0	$-26\,000$	$\leftarrow$	= - optimaler Wert
			$\uparrow$ <0		$\uparrow$ <0				

Ablesedaten

$j = 1: \quad i_1 = 1, \quad x_1 = b_1 = 30$
$j = 2: \quad i_2 = 3, \quad x_2 = b_3 = 40$
und $X = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$ mit optimalem Wert $26\,000$.

Noch abzulesen: Die Ungleichungen 2 und 4 sind strikte Ungleichungen im optimalen Punkt. Es sind $y_2 = 30$ und $y_4 = 130$. (Dabei: y_j in der Vorspalte = das entsprechende b_{i_j} in der Wertespalte !)

Ein weiteres Rechenbeispiel:
Maximiere $Z(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4$ unter den Restriktionen:

$$\begin{array}{cc} \text{(i)} & x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \ \leq \ 8 \\ \text{(ii)} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \ \leq \ 5 \\ \text{(iii)} & x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \ \leq \ 6 \end{array}$$

und den Nichtnegativitätsbedingungen $x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots 4$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	w	q
y_1	1	−2	$\boxed{1}$	3	1	0	0	8	8
y_2	2	3	−1	2	0	1	0	5	–
y_3	1	1	−3	4	0	0	1	6	–
	1	2	$\boxed{3}$	−1	0	0	0	0	

x_3	1	−2	1	3	1	0	0	8	–
y_2	3	$\boxed{1}$	0	5	1	1	0	13	13
y_3	4	−5	0	13	3	0	1	30	–
	−2	$\boxed{4}$	0	−8	−3	0	0	−24	

x_3	7	0	1	13	3	2	0	34	
x_2	3	1	0	5	1	1	0	13	
y_3	19	0	0	38	8	5	1	95	
	−14	0	0	−28	−7	−4	0	−76	

Ergebnis: Man hat $x_3 = 34\,, x_2 = 13\,, x_1 = 0\,, x_4 = 0$ und $y_3 = 95\,, y_1 = 0\,, y_2 = 0$.

Also: $x_{\max} := \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist optimaler Punkt zum optimalen Wert 76 .

Außerdem: $x_{\max}$ ist Schnittpunkt von $, x_1 = 0\,, x_4 = 0$ und der durch (i) und (ii) gegebenen Gleichungen.
Als Übung und zum Vergleich: Das gleiche Beispiel auf einem anderen Rechenweg:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	w	q
y_1	1	−2	1	3	1	0	0	8	8
y_2	$\boxed{2}$	3	−1	2	0	1	0	5	$\frac{5}{2}$
y_3	1	1	−3	4	0	0	0	7	6
	$\boxed{1}$	2	3	−1	0	0	0		0

y_1	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{3}$
x_2	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	–
y_3	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	3	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	–
	0	$\frac{7}{2}$	$\boxed{\frac{7}{2}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	

$$\begin{array}{c|ccccccc|c|c}
x_3 & 0 & -\frac{7}{2} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{11}{3} & - \\
x_1 & 1 & \boxed{\frac{1}{3}} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{13}{3} & 13 \\
y_3 & 0 & -\frac{19}{3} & 0 & \frac{19}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & \frac{38}{3} & - \\
\hline
 & 0 & \boxed{\frac{14}{3}} & 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{46}{3} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|c|}
x_3 & & & & & & & & 34 \\
x_2 & & & & & & & & 13 \\
y_3 & & & & & & & & 95 \\
\hline
 & -14 & 0 & 0 & -28 & -7 & -4 & 0 & -76
\end{array}$$

Hinweis:
Es spart Rechenarbeit, bei jedem neuen Tableau zuerst die letzte Zeile (die Zielzeile) auszurechnen. Ist das Optimalitätskriterium (d.h. alle Einträge ≥ 0) erfüllt, so braucht man nur noch die letzte Spalte auszurechnen und die Vorspalte auf den neuesten Stand zu bringen. Das Ergebnis läßt sich dann bereits ablesen.

8.4 Minimumaufgaben und das duale Problem

8.4.1 Eine konkrete Minimierungsaufgabe

Beispiel: Eine kostenoptimale Futtermischung.

Gegeben: 2 Futtersorten F_1, F_2 und 4 Vitamine V_1, V_2, V_3, V_4

Die folgende Tabelle gibt den Gehalt an Einheiten der Vitamine in je 100g der Futtermittel und den Tagesbedarf an Vitaminen an:

Vitamine	Gehalt im Futtermittel		Minimalbedarf
	F_1	F_2	
V_1	6	1	22
V_2	7	4	71
V_3	6	10	120
V_4	3	9	72

Die Preise der Futtermittel sind pro 100g : 1,50 Euro für F_1 und 1 Euro für F_2 .

Eine weitere Bedingung: Der Höchstbedarf pro Tag ist 2kg = 20×100g pro Tag .
Sei $\binom{x_1}{x_2}$ der Futtermittelverbrauch pro Tag (in Einheiten von 100 g)

Mathematisierung:

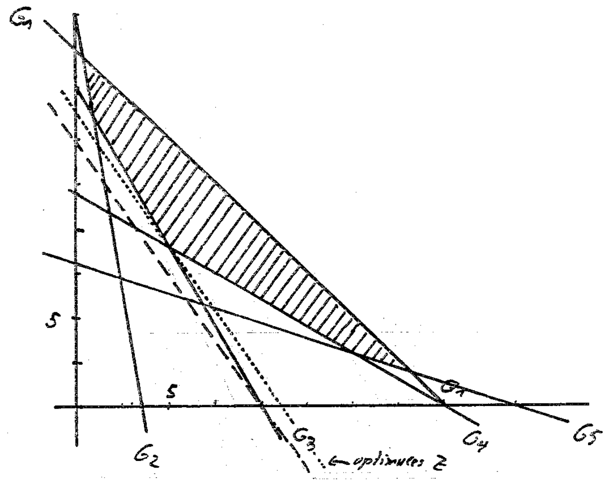
Kosten-(Ziel-)Funktion: $Z(x) := 1,5x_1 + x_2$

Nicht-Negativitätsbedingung: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Restriktionen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 20 \qquad (\Longleftrightarrow -x_1 - x_2 \leq -20\,) \\ 6x_1 + x_2 &\geq 22 \\ 7x_1 + 4x_2 &\geq 71 \\ 6x_1 + 10x_2 &\geq 120 \\ 3x_1 + 9x_2 &\geq 72 \end{aligned}$$

Geometrisches Bild



Optimaler Punkt: Schnitt von G_4 mit G_3: $x_{\max} = \binom{x_1}{x_2} = \binom{5}{9}$

Minimale Kosten: 16,5 Euro (erhalten duch Einsetzen von $x_{\max}$ in die Zielfunktion)

8.4.2 Standardminimumproblem und das duale Problem

Das folgende Optimierungsproblem heißt Standard-Minimumproblem. Wir formulieren das Problem als ein Minimierungsproblem für Tupel $y \in \mathbb{R}^m$ und geben auch den Matrizen, welche die Ungleichungen beschreiben, und der Zielfunktion neue Namen, um den Übergang zum dualen Problem deutlicher formulieren zu können.

Standardminimumproblem:

Seien $T = (t_1\ t_2\ ...\ t_m) \in \mathbb{R}^{1\times m}\,, C \in \mathbb{R}^{n\times m}\,, d \in \mathbb{R}^n\,.$
Minimiere $T(y) = t_1 y_1 + \ldots + t_m y_m$
unter $C\cdot y \geq d$
und $y_i \geq 0\,, i = 1, ..., m\,.$

Mitteilung
In der Theorie der Linearen Optimierung gibt es ein "Dualitätsprinzip", das sich als wesentlich zum richtigen Verständnis der Theorie erwiesen und auch praktische Anwendungen hat. Wir gehen ganz kurz auf dieses Prinzip ein.

Das zu einem Standardmaximumproblem duale Standardminimumproblem:

Zu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $Z = (z_1\, z_2 \dots z_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ sei folgendes Maximierungsproblem betrachtet:

$$\text{(MAX)} \qquad \begin{cases} \text{Maximiere} & Z(x) &=& z_1x_1 + z_2x_2 + \dots + z_nz_n \\ \text{unter} & A\,x &\le& b \\ \text{und} & x_i &\ge& 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Man transponiert nun die vorkommenden Matrizen:

$$T := b^t \overset{!}{\in} \mathbb{R}^{1\times m}\,, \quad C := A^t \overset{!}{\in} \mathbb{R}^{n\times m}\,, \quad d := Z^t \overset{!}{\in} \mathbb{R}^n$$

und betrachtet das zugehörige Standardminimumproblem

$$\text{(MIN)} \qquad \begin{cases} \text{Minimiere} & T(y) &=& t_1y_1 + t_2y_2 + \dots + t_ny_m \\ \text{unter} & C\,y &\ge& d \\ \text{und} & y_i &\ge& 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Definition

Die Optimierungsprobleme (MAX) und (MIN) heißen **dual** zueinander.

Bemerke: Wegen $(Z^t)^t = Z\,, (A^t)^t = A\,, (b^t)^t = b$ gewinnt man das Maximumproblem (MAX) aus dem Minimumproblem (MIN) durch ein analoges "Dualisierungsverfahren" zurück.

Zusammenfassung:

Gemäß der Definition von $T\,, C\,, d$ hat man für die zueinander dualen Probleme (MAX) und (MIN) folgenden Zusammenhang:

$$\text{(MAX)} \quad \begin{array}{rrcl} \text{Maximiere} & Z(x) &=& Z\,x \\ \text{unter} & A\,x &\le& b \\ \text{und} & x_i &\ge& 0\,, i = 1, \dots, n \end{array} \;\Bigg|\; \text{(MIN)} \quad \begin{array}{rrcl} \text{Minimiere} & T(y) &=& b^ty \\ \text{unter} & A^ty &\ge& Z^t \\ \text{und} & y_i &\ge& 0\,, i = 1, \dots, m \end{array}$$

Demonstration an unserem Beispiel aus 8.4.1 :

$$\text{Es ist:} \quad Z = (\,1.5\;1\,)\,, \; A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 4 \\ 6 & 10 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -20 \\ 22 \\ 71 \\ 120 \\ 72 \end{pmatrix}$$

Bei diesen Daten haben wir im Minimumproblem die erste Ungleichung von $x_1 + x_2 \le 20$ umgeschrieben in die Standardform $-x_1 - x_2 \ge -20$.
Die transponierten Matrizen sind

$$b^t = (-20 \;\; 22 \;\; 71 \;\; 120 \;\; 72)\,, \; A^t = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 7 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} \text{ und } Z^t = \binom{1.5}{1}\,.$$

Das zum Minimumproblem in 8.4.1 duale Maximumproblem ist also das Folgende:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & T(y) = -20y_1 + 22y_2 + 71y_3 = 120y_4 + 73y_5 \\ \text{unter} & -y_1 + 6y_2 + 7y_3 + \ \ 6y_4 + 3y_5 \le 1,5 \\ & -y_1 + \ \ y_2 + 4y_3 + 10y_4 + 9y_5 \le 1 \\ \text{und} & \ \ y_i \ge 0 \end{array}$$

Es gilt der entscheidende **Dualitätssatz**:

(1) Der zulässige Bereich eines Standardminimumproblems ist genau dann nicht leer, wenn der zulässige Bereich des dazu dualen Maximumproblems nicht leer ist.

(2) Ein Standardminimumproblem hat genau dann eine Lösung (d.h. die Funktion $T(x)$ hat ein Minimum auf dem zulässigen Bereich), wenn das dazu duale Maximumproblem eine Lösung (d.h. ein Maximum auf seinem zulässigen Bereich) hat.

(3) Wenn die beiden Probleme eine Lösung haben, sind die optimalen Werte gleich: Das Minimum des Mimimumproblems ist gleich dem Maximum des dazu dualen Maximumproblems.

Zusatz:
Wenn sich das Maximumproblem mit dem Simplexalgorithmus lösen läßt, erhält man die optimale Ecke des Minimumproblems auf folgende Weise:
Die Einträge von der $(n+1)$-ten bis zur $(n+m)$-ten Spalte der Zielzeile des Endtableaus des Maximumproblems sind die negativen Koordinaten des optimalen Punktes des Minimumproblems. D.h. ist $(\,-z_1 \ldots - z_n \quad - z_{n+1} \ldots - z_{n+m} \quad - w\,)$ die Zielzeile dieses Endtableaus, so ist $x = \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_{n+m} \end{pmatrix}$ optimale Ecke und der optimale Wert (das Minimum) ist w .

Ablese-Beispiel: Angenommen, das duale Maximumproblem hat als Endtableau

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r} 2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -2 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & -4 & 1 & 8 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 5 & 15 \\ \hline -5 & 0 & -4 & 0 & -10 & 0 & -15 & -20 & -45 \end{array}$$

Dann: Das Ausgangs-Minimumproblem hat den minimalen Wert $w_{\text{min}} = 45$, und zwar bei der Ecke $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$

Anmerkung:
Bei uns kann man das Minimumproblem mittels Simplexverfahren für das duale Maximumproblem nur dann lösen, wenn dieses duale Maximumproblem die Voraussetzung $b \ge 0$ erfüllt, die wir für unser Simplexverfahren brauchten.
Für das Minimumproblem heißt das: Es muß $T \ge 0$, d.h. alle Koeffizienten t_i, der Zielfunktion müssen größer-gleich 0 sein. (Dann das werden die Einträge auf der rechten Seite dualen Maximumproblems.)

Also etwa: Das explizit behandelte Beispiel aus 8.4.1 kann mit unserem Simplexverfahren nicht auf dem Umweg über das duale Maximumprogramm behandelt werden. Denn in der Zielfunktion in Standardform ist der erste Koeffizient gleich -20 .

8.5 Aufgaben

Aufgabe 1. Zeichnen Sie den durch die folgenden Ungleichungen beschriebenen Bereich des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 7x_2 & \leq & 70 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & \geq & 40 \\ 11x_1 & - & 18x_2 & \leq & 44 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 40 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & \geq & -50 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

und untersuchen Sie unter diesen Nebenbedingungen die Lösungen folgender linearer Optimierungsprobleme:

a) $\min f(x)$ mit $f(x) = x_1 + x_2$

b) $\max f(x)$ mit $f(x) = x_1 + x_2$

c) $\max f(x)$ mit $f(x) = 2x_1 - x_2$

d) $\min f(x)$ mit $f(x) = -3x_1 + 2x_2$

Aufgabe 2. Ein Kaufmann hat 20 kg Nüsse und 30 kg Rosinen zum Preis von 9 EUR bzw. 5 EUR je kg eingekauft. Er kann die Nüsse und Rosinen zum Preis von 12 EUR bzw. 7 EUR verkaufen. Er kann aber auch eine Mischung aus beiden herstellen und sie unter dem Namen „Studentenfutter" verkaufen. Der Preis dieser Mischung soll 10 EUR je kg betragen. Dabei muss aber der Anteil der Nüsse mindestens 25% ausmachen. Welche Verkaufsweise ist für den Kaufmann am günstigsten?

Aufgabe 3. Untersuchen Sie graphisch auf Lösbarkeit:

$a)$ $\max\ x_1 + 2x_2$
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 5x_2 & \leq & 50 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 60 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 20 \\ x_1 & & & \leq & 10 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$b)$ $\max\ 2x_1 - x_2$
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & \geq & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & -2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$c)$ $\min\ 4x_1 - 5x_2$
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 4x_2 & \geq & 8 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & - & x_2 & \geq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus das Maximum der Zielfunktion

$$Z(x) = x_1 + x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 7x_2 & \leq & 70 \\ 11x_1 & - & 18x_2 & \leq & 44 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 40 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 50 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Vergleichen Sie den Algorithmus mit der graphischen Lösung (vgl. auch Aufgabe 1).