

7 Lineare Abbildungen und Lineare Gleichungssysteme

7.1 Lineare Abbildungen

7.1.1 Abbildungen: Eine Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffs

Bemerkung:

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n \times 1}$. Dann: $A \cdot x = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

Also: Die Prozedur, von links A heranzumultiplizieren, liefert für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ genau ein $y \in \mathbb{R}^m$. In Analogie zum früheren Funktionsbegriff (siehe 3.1.1) kann man sagen: Die betrachtete Prozedur definiert eine Funktion oder eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

Das gibt uns die Gelegenheit, in einem kurzen Exkurs den allgemeinen Funktions- oder Abbildungsbegriff einzuführen:

Definition (Allgemeiner Abbildungsbegriff)

Seien M, N Mengen (siehe 1.1.2).

Eine **Abbildung** von M nach N ist eine Zuordnung, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet.

Man benutzt dieselbe Schreibweisen wie in 1.1.2 für die Funktionen:

$f : M \longrightarrow N, x \longmapsto f(x)$ für die Abbildung,

$f(x)$ für das dem $x \in M$ zugeordnete Element aus N usw.

Auch damit zusammenhängende Begriffe und Objekte sind wie früher definiert:

M =: Definitionsbereich von f ,

N =: Ziel von f ,

$f(x)$ =: Bild von x unter f ,

$\text{Bild}(f) := \{ f(x) \mid x \in M \} \subseteq N$,

$f(S) := \{ f(s) \mid s \in S \}$ für $S \subseteq M$,

$f^{-1}(y) := \{ x \in M \mid f(x) = y \}$ =: Urbild von y , für $y \in N$,

$f^{-1}(T) := \{ x \in M \mid f(x) \in T \}$ =: Urbild von T , für $T \subseteq N$,

u.a. .

Auch der Begriff des Graphen einer Funktion (s.Def.2 in 3.1.2) läßt sich verallgemeinern:

Bezeichnung:

Ein **geordnetes Paar** sind zwei Objekte in festgelegter Reihenfolge, ein erstes Objekt – etwa x_1 genannt – und ein zweites Objekt x_2 .

Für das geordnete Paar schreibt man (x_1, x_2) . Das x_1 heißt die erste **Koordinate** des Paares, das x_2 heißt die zweite Koordinate.

Das **kartesische Produkt** der Mengen $M \times N$ ist definiert als die Menge aller geordneten Paare (x_1, x_2) mit erster Koordinate aus M und zweiter Koordinate aus N .

Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, so heißt $G(f) := \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in M, x_2 \in N \} \stackrel{!}{\subseteq} M \times N$ der **Graph** von f .

Beispiele:

(1) Unter diesen allgemeinen Begriff der Abbildung fallen viele Sachverhalte, die wir bereits behandelt haben. Zum Beispiel:

Die Anfangsbemerkung führt zur Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, x \longmapsto A \cdot x$ (7.1.2 Bezeichnung 1).

Die Addition, etwa in $\mathbb{R}^n$, ist eine Abbildung “+”: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \longmapsto x + y$. (Dabei: M ist das kartesische Produkt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^n$ mit sich selbst und N ist gleich $\mathbb{R}^n$).

Die skalare Multiplikation ist eine Abbildung des Typs $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Das Skalarprodukt ist eine Abbildung des Typs $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Das Transponieren von Matrizen ist eine Abbildung des Typs $\mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$.

(2) Auch die abgeleitete Begriffe in der Definition spielen besondere Rollen, etwa:

Das Urbild $f_A^{-1}(b)$ von $b \in \mathbb{R}^m$ unter f_A ist die “Lösungsmenge” des linearen Gleichungssystems $Ax = b$!

7.1.2 Matrizen als lineare Abbildungen

Wir kommen zurück zur Bemerkung in 7.1.1:

Bezeichnung 1:

Zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ die Abbildung $x \longmapsto A \cdot x$.

Beispiele:

In niedrigen Dimensionen kann man Beispiele solcher Abbildungen geometrisch deuten:

(1) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

Also: f_A ist Spiegelung an x -Achse.

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Dann ist $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y \\ \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \end{pmatrix}$.

Man kann sich klar machen: f_A ist Drehung um den Nullpunkt um den Winkel α .

Tatsache 1:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $f := f_A$ wie in der Bezeichnung 1. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(LA1) \quad f(x + y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbb{R}^n, \text{ und}$$

$$(LA2) \quad f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x), \lambda \in \mathbb{R}$$

Beweis: Folgt aus den Rechenregeln für das Matrizenprodukt aus dem Satz in 6.2.4:
(LA1) aus dem Distributivgesetz (D), (LA2) aus der dortigen Regel (A1).

Definition:

Seien V und W Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ sei eine Abbildung. Dann:
 f heißt **linear** $:\Leftrightarrow$ (LA1) und (LA2) gelten.

Lineare Abbildungen von V nach $\mathbb{R}$ heißen auch **Linearformen** auf V .

Beispiele

Die Abbildungen f_A zu Matrizen A .

Die Transposition $A \longmapsto A^t$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{m \times n}$ nach $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Das Integral $f \longmapsto \int_a^b f(x) dx$ ist eine Linearform auf $V := \{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$.

Die Ableitung ist eine lineare Abbildung von $V := \{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar} \}$ nach $\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$.

Tatsache 2

Zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gibt es genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so daß $f = f_A$. Anders gesagt: Jede lineare Abbildung kann durch das Heranmultiplizieren einer Matrix realisiert werden.

Beweis: Zu f nimmt man als A die Matrix, deren j -te Spalte gerade das Bild $f(e_j)$ des j -ten Einheitsstupels (siehe das Grundbeispiel in 6.4.5), so folgt die Behauptung aus dem Prinzip der linearen Fortsetzung (siehe 7.1.3).

Bezeichnung 2:

Das A mit $f = f_A$ heißt die **Matrix von f** oder **die zu f gehörige Matrix**.

Die Tatsachen 1 und 2 kann man so zusammenfassen:

Satz (Lineare Abbildungen zwischen Tupelräumen):

Die linearen Abbildungen zwischen Tupelräumen sind gerade die Abbildungen f_A aus der Bezeichnung 1.

7.1.3 Prinzip der linearen Fortsetzung

Satz (Prinzip der linearen Fortsetzung):

Seien V und W Vektorräume und $X_1, X_2, \dots, X_n$ sei eine Basis von V . Dann:

Zu jeder Folge $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ von Elementen aus W gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(X_j) = Y_j$ für alle $j = 1, 2, \dots, n$.

Dieses f ist gegeben durch $f(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j$, wenn $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j$.

Beweis: Man rechnet nach: Die Abbildung $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \mapsto f(x) := \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j$ ist wohldefiniert und linear und erfüllt $f(X_j) = Y_j$ für alle $j = 1, 2, \dots, n$. Und: Jede Abbildung mit der im Satz geforderten Eigenschaft muß x notwendigerweise auf das angegebene $f(x)$ abbilden.

Anwendung des Satzes auf zweierlei Weise:

Erstens: Zur Definition linearer Abbildungen.

Der Satz besagt nämlich: Man kann lineare Abbildungen durch beliebige Vorgabe (d.h. in der Praxis durch gezielte Vorgabe) von Werten für die Basiselemente $X_j, j = 1, \dots, n$ definieren.

Zweitens: Um festzustellen, ob zwei lineare Abbildungen dieselben sind. Nämlich:

Zwei lineare Abbildungen $f, g : V \rightarrow W$ sind gleich, wenn sie auf einer Basis von V übereinstimmen.

Ein Anwendungsbeispiel: Der Beweis der Tatsache 2 in 7.1.2.

Man hat $V := \mathbb{R}^n, W := \mathbb{R}^m, X_j := e_j, j = 1, \dots, n$ (die Einheitstupel). Nehme als Matrix A diejenige (m, n) -Matrix mit $A_{\cdot j} := f(e_j)$ für $j = 1, \dots, n$, d.h. die Matrix mit den $f(e_j)$ als j -ter Spalte. Man rechnet nach: Dann ist $f(e_j) = f_A(e_j)$ für alle j . Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung ist also $f = f_A$.

7.1.4 Komposition linearer Abbildungen entspricht Matrizenprodukt

Seien V, W, Z Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow Z$, seien lineare Abbildungen.

Tatsache:

Die Komposition $g \circ f : V \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$, ist linear.

Beweis: $g \circ f(\lambda x + y) = g(f(\lambda x + y)) \stackrel{f \text{ linear}}{=} g(\lambda f(x) + f(y)) \stackrel{g \text{ linear}}{=} \lambda g(f(x)) + g(f(y)) = \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y)$.

Satz:

Seien jetzt $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m, Z = \mathbb{R}^k$.

Es seien $f = f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $g = f_B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $B \in \mathbb{R}^{k \times m}$.

Dann: $f_B \circ f_A = f_{BA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

In Worten: Die Komposition linearer Abbildungen zwischen Tupelräumen ist gegeben durch das Produkt der zugehörigen Matrizen.

Beweis: Man rechnet nach: Für die Einheitstupel $e_j, j = 1, 2, \dots, n$ ist sowohl $g(f(e_j)) =$ j -te Spalte von BA als auch $f_B \circ f_A(e_j) = j$ -te Spalte von BA . Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung ist also $g \circ f = f_B \circ f_A$.

Anmerkung: Die Aussage des Satzes ist auch eine Motivation für die Definition des Matrizenproduktes.

7.1.5 Markov-Prozesse

Lineare Abbildungen werden angewandt bei der Beschreibung sogenannter linearer Prozesse. Wir werde hier einen Typ solcher Prozesse beschreiben.

Bezeichnung: Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ heißt } \mathbf{stochastisch} \text{ (oder} \\ \text{ein } \mathbf{Wahrscheinlichkeitsvektor}) \end{array} \right\} \iff 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } i \text{ und } \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$A \text{ heißt } \mathbf{stochastisch} \iff \text{Alle Spalten sind stochastisch (in } \mathbb{R}^{m \times 1} \equiv \mathbb{R}^m)$$

Gegeben sei ein “System” (Beispiel siehe unten), das n Zustände annehmen kann, die sich gegenseitig ausschließen. Zum Zustand i , $i = 1, \dots, n$, sei x_i die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System im Zustand i befindet.

Man nennt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ den **Zustandsvektor** des Systems. Das System unterliege nun einer

Transformation. Dabei sei

$a_{ij} :=$ Wahrscheinlichkeit, daß sich das System, wenn es vor der Transformation im Zustand j war, nach der Transformation im Zustand i befindet.

Die Matrix $A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt die **Übergangsmatrix**.

Die Definition der a_{ij} ergibt:

Ist x der Zustandsvektor vor der Transformation und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ derjenige danach, so ist

$$y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \stackrel{!}{=} (A \cdot x)_i$$

Somit:

$$y = A \cdot x \quad (*)$$

Nun werde die Transformation einmal, zweimal, ... iteriert. In dieser Situation:

Bezeichnung:

Ist bei allen aufeinander folgenden Transformationen die Übergangsmatrix die gleiche, so spricht man von einem **Markov-Prozeß**.

Der “Prozeßverlauf” ist dann der folgende:

Seien $x^{(0)}$ = Zustandsvektor zu Beginn, $x^{(k)}$ = Zustandsvektor nach der k -ten Transformation. Mit Hilfe von $(*)$ erhält man

$$x^{(1)} = A \cdot x^{(0)}, x^{(2)} = A \cdot x^{(1)} = A^2 \cdot x^{(0)}, \dots \text{ und nach Induktion}$$

$$x^{(k)} = A \cdot x^{(k-1)} = A^2 \cdot x^{(k-2)} = \dots = A^k \cdot x^{(0)}.$$

Ergebnis:

$$\boxed{x^{(k)} = A^k \cdot x^{(0)}}.$$

Dabei ist $A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-Faktoren}}$ die **k -te Potenz von A** .

Es interessiert vor allem der Zustand für große k , d.h. für $k \rightarrow \infty$ und dabei die Frage, ob der Zustand unter Umständen stabil wird.

Konkretes Beispiel

Eine Firma habe drei Autoverleihfilialen. Tageweise werden Autos verliehen mit abendlicher Rückgabepflicht. Nachts sind alle Wagen auf die drei Filialen verteilt. Es seien

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wagen auf die Filialen.}$$

$a_{ij} :=$ Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Wagen, der sich vor dem Verleih in Filiale j befand, danach in Filiale i befindet.

Dann:

$$x^{(k)} = A^k \cdot x^{(0)} = \text{Wahrscheinlichkeitsverteilung nach } k\text{-tem Tag,} \\ \text{wenn } x^{(0)} = \text{Anfangsverteilung}$$

Konkrete Daten:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
stochastisch!

$\uparrow$
stochastisch!

Man rechnet aus:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \dots, x^{(5)} = \begin{pmatrix} 0,533 \\ 0,238 \\ 0,219 \end{pmatrix}, \dots, x^{(11)} = \begin{pmatrix} 0,557 \\ 0,230 \\ 0,213 \end{pmatrix}$$

Es stellt sich heraus: $x^{(k)} = x^{(11)}$ bis auf drei Dezimalen für $k \geq 11$.

Das ist ein deutliches Indiz dafür, daß der Zustand stabil wird. Tatsächlich:

Information: Mit tiefer gehender Mathematik kann man in diesem Fall und in entsprechenden Fällen beweisen, daß der Zustand gegen eine stabile Verteilung konvergiert.

7.2 Lineare Gleichungssysteme: Die Theorie

Wir haben in 6.2.3 Beispiel (3) gesehen, daß sich lineare Gleichungssysteme (LGS'e) als Matrixgleichung schreiben lassen.

In den folgende Abschnitten wird allgemein das LGS

$$Ax = b \quad (*)$$

behandelt, wo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Parallel dazu untersuchen wir das konkrete LGS

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrcl} & & & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & + & 2x_5 & - & x_6 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & + & 5x_5 & - & 2x_6 & = & -1 & (**) \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & - & 3x_5 & + & 2x_6 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & - & 4x_5 & + & 3x_6 & = & a \end{array}$$

mit $m = 5, n = 6$.

Dabei ist das a (rechte Seite der letzten Gleichung) ein Parameter, den wir vorerst offenhalten, um mehrere Varianten beim Lösungsweg behandeln zu können.

7.2.1 Grundbemerkungen und Grundbegriffe

Bezeichnung:

Das A in $(*)$ heißt die **Koeffizientenmatrix** des LGS.

Das b in $(*)$ heißt die **rechte Seite** des LGS. Die $(n+1)$ -spaltige Matrix, die man erhält, indem man hinter der letzten Spalte von A noch die Spalte b hinzufügt, wird mit $(A|b)$ oder $\tilde{A}$ bezeichnet und heißt die **erweiterte Koeffizientenmatrix** des LGS. Dieses $\tilde{A}$ beschreibt das LGS vollständig.

Im konkreten Beispiel $(**)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -4 & -4 & 3 & a \end{array} \right)$$

Der senkrechte Strich rechts steht dabei nur aus suggestiven Gründen. Er soll betonen, daß die letzte Spalte die hinzugefügte rechte Seite des LGS ist.

In Zukunft werden wir auch der Einfachheit halber die Klammern um die Matrizen weglassen.

Definition (des Lösungsraumes):

Gegeben sei das LGS

$$Ax = b \quad (*)$$

Sein **Lösungsraum** ist die Teilmenge

$$L(*) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \text{ im } \mathbb{R}^n$$

Das Gleichungssystem heißt **lösbar**, wenn $L(*) \neq \emptyset$ ist.

Grundbemerkung

Elementare Zeilenumformungen an der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ entsprechen gerade dem üblichen erlaubten Rechnen mit den Gleichungen des LGS.

Beweis: Das macht man sich unmittelbar klar.

Wir nennen die den elementaren Zeilenumformungen an $(A|b)$ entsprechenden Umformungen des Gleichungssystems **elementare Umformungen** des LGS.

Z.B. bedeutet die Umformung $M(1, 2|\lambda)$ das Addieren des λ -fachen der zweiten Gleichung zur ersten Gleichung.

Grundtatsache

Die Matrix $\tilde{A}'$ entstehe aus $\tilde{A}$ durch endlich viele elementare Zeilenumformungen. Dann: Das zu $\tilde{A}'$ gehörige LGS hat denselben Lösungsraum wie das ursprüngliche zu $\tilde{A}$ gehörige LGS.

Beweis: Man rechnet direkt nach: Jede Lösung des durch eine elementare Umformung entstandenen Systems ist auch eine Lösung des alten Systems und umgekehrt.

Diese Tatsache suggeriert die Strategie beim Lösen eines LGS: Man vereinfacht das LGS durch elementare Umformungen so lange, bis ein LGS entstanden ist, das man einfach und direkt lösen kann.

Das Ergebnis in 6.5.2 liefert z.B.: Man kann das LGS elementar so umformen, daß die neue erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat (und die Lösungsmenge die gleiche geblieben ist).

7.2.2 Ein Lösbarkeitskriterium

Bemerkung:

Wir betrachten das LGS $Ax = b$ als Gleichung in den Spalten. Man erhält

$$Ax = b \iff x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Als Folgerung ergibt sich:

Tatsache:

$Ax = b$ ist lösbar $\iff b$ ist Linearkombination der Spalten von A .

$$\iff b \in \text{Spaltenraum von } A \iff \text{Rang } A = \text{Rang}(A|b)$$

In Worten: Ein Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich (und nicht größer!) ist dem Rang der (einfachen) Koeffizientenmatrix.

7.2.3 Die Struktur des Lösungsraumes

Zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ betrachten wir die LGS'e

$$(*) \quad Ax = b \quad \text{und} \quad (*)_0 \quad Ax = 0.$$

Bezeichnung 1:

LGS'e der Form $Ax = 0$, also solche mit rechter Seite $b = 0$, heißen **homogene** LGS'e.

Das LGS $(*)_0$ heißt das zum LGS $(*)$ **gehörige homogene** LGS.

Erinnere die **Tatsache 2** in 6.4.3 :

Der Lösungsraum $L_0 = L(*)_0$ eines homogenen LGS ist ein linearer Unterraum.

Der Lösungsraum eines allgemeinen LGS hat folgende Eigenschaften:

Tatsache 2:

Sei L der Lösungsraum von $Ax = b$ und L_0 der Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGS $Ax = 0$. Es gilt:

- (1) Für $x, y \in L$ ist $y - x \in L_0$.
Ist $x \in L$ und $z \in L_0$, so ist $x + z \in L$.
- (2) Sei $x \in L$. Jedes $y \in L$ läßt sich darstellen als $y = x + z$ mit einem $z \in L_0$.
Schreibt man kurz $x + L_0$ für $\{x + z \mid z \in L_0\}$, so ist also
$$L = x + L_0.$$

Man drückt das auch so aus:

$$\text{Lösungsraum eines LGS} = \left\{ \begin{array}{l} \text{spezielle Lösung plus Lösungsraum des} \\ \text{zugehörigen homogenen Systems} \end{array} \right.$$

Beweis: (1) $A(y - x) = Ay - Ax = b - b = 0$.

$A(x + z) = Ax + Az = b + 0 = b$.

(2) Sei $z := y - x$. Dann ist $z \in L_0$ nach (1) und $y = x + z$.

Bezeichnung 2:

Untermengen L von $\mathbb{R}^n$, die sich (wie die Lösungsräume von Gleichungssystemen) darstellen lassen als

$$L = x + W \quad (= \{x + w \mid w \in W\})$$

mit einem $x \in L$ und einem linearen Unterraum W , heißen **affine Unterräume** von $\mathbb{R}^n$.

Die **Dimension** des affinen Unterraums $L = x + W$ ist definiert als $\dim L := \dim W$.

Insbesondere: Die affinen Unterräume der Dimension 0 sind die Punkte von $\mathbb{R}^n$.

Bisher haben wir herausgearbeitet: Die Lösungsräume linearer Gleichungssysteme sind affine Unterräume im $\mathbb{R}^n$. Es bleibt noch die Bestimmung der Dimension. Wir geben das Ergebnis an und fassen noch einmal zusammen:

Satz:

Die Dimension des Lösungsraumes L_0 des homogenen LGS $Ax = 0$ ist $n - \text{Rang } A$.

Also: Das LGS $Ax = b$ hat keine Lösungen oder der Lösungsraum ist der d -dimensionale affine Unterraum $x + L_0$, wo x eine (spezielle) Lösung des LGS, wo L_0 der Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGS $Ax = 0$ und wo $d = n - \text{Rang } A$ ist.

7.3 Lineare Gleichungssysteme: Die Lösungspraxis

7.3.1 Lösbarkeit bei Zeilenstufenform

Der Satz in 6.5.3 und die grundsätzlichen Überlegungen in 7.2.1 liefern:

Tatsache 1

Jedes LGS $Ax = b$ kann elementar so umgeformt werden, daß die neue erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform ist. (Die Lösungsmenge bleibt dabei die gleiche.)

In diesem Stadium läßt sich die Lösbarkeit des LGS bequem ablesen:

Tatsache 2

Ein LGS, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform ist, ist genau dann lösbar, wenn die letzte Spalte von $\tilde{A}$, also die $(n+1)$ -te Spalte (und neue rechte Seite), keine Pivotspalte ist.

Beweis: Sei k der (Stufen-)Rang von $\tilde{A}$. Die k -te Gleichung lautet dann

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = a_{k, n+1} (= b_k).$$

Offenbar ist diese Gleichung und somit das ganze LGS nicht lösbar, wenn $a_{k, n+1} \neq 0$ d.h. wenn $n+1$ Pivotindex ist.

Umgekehrt macht man sich ohne Mühe klar, daß im Falle $a_{k, n+1} = 0$ die letzte Spalte im Spann der ersten n Spalten liegt, daß also dann das LGS gemäß der Tatsache in 7.2.2 lösbar ist.

7.3.2 Normierte Zeilenstufenform

Definition:

Ein $A \in K^{m \times n}$, $A \neq 0$ heißt in **normierter Zeilenstufenform**, wenn gilt:

- (1) A ist in Zeilenstufenform (s. 6.5.3). Der (Stufen-)Rang von A sei k .
- (2) Sind $j_1, j_2, \dots, j_k$ die Pivot-Indizes, so gilt:
Die Spalten $A_{\cdot j_1}, A_{\cdot j_2}, \dots, A_{\cdot j_k}$ sind – in dieser Reihenfolge – die Einheitsspalten $e_1, e_2, \dots, e_k$ im $\mathbb{R}^n$.

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\
 e_1 & & e_2 & e_3 & & e_4 &
 \end{array}$$

Satz:

Jedes $A \in K^{m \times n}$, $A \neq 0$, kann durch elementare Zeilenumformungen auf normierte Zeilenstufenform gebracht werden.

Beweis: Zuerst auf Zeilenstufenform gemäß dem Satz in 6.5.3.

Dann auf normierte Zeilenstufenform nach folgendem Verfahren.

Algorithmus, der aus einer Matrix A in Zeilenstufenform eine Matrix in normierter Zeilenstufenform macht.

Die Pivot-Indizes seien $j_1, j_2, \dots, j_k$. Setze $i = k$.

1 (i) Multipliziere die i -Zeile mit $\frac{1}{a_{ij_i}}$.

Das produziert eine 1 an die Stelle (i, j_i) .

(ii) Ist $i = 1$? Wenn ja, gehe zu **3**.

Wenn nein, mache weiter mit **2**.

2 (i) Für $r = 1, 2, \dots, i - 1$: Subtrahiere das a_{rj_i} -fache der i -ten Zeile von der r -ten Zeile.

(Liefert Nullen in der j_i -ten Spalte oberhalb der Pivotstelle (i, j_i) , unterhalb davon stehen schon Nullen. Die Spalten j , $j < j_i$, werden nicht verändert, da $a_{ij} = 0$ für diese j .)

(ii) Erniedrige i um 1. Gehe zu **1**.

3 Verfahren zu Ende: A hat normierte Zeilenstufenform.

Beispiel zum Verfahren :

Wir bringen die Matrix A vom Ende von 6.5.3, die in Zeilenstufenform ist, auf normierte Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Ergebnis: Das ist das A aus dem Beispiel für normierte Zeilenstufenform.

7.3.3 Ablesen des Lösungsraumes bei normierter Zeilenstufenform

Der Satz aus 7.3.2 und die Überlegungen in 7.2.1 liefern bisher:

Tatsache:

Jedes LGS kann durch elementare Umformungen so abgeändert werden, daß die neue erweiterte Koeffizientenmatrix normierte Zeilenstufenform hat.

Es stellt sich heraus, daß wir bereits am Ziel eines effektiven Lösungsverfahrens sind. Denn bei einem LGS mit einer erweiterten Koeffizientenmatrix in normierter Zeilenstufenform kann man den Lösungsraum konkret und explizit ablesen. Wir beschreiben das im folgenden Satz.

Satz (Ablesen des Lösungsraumes)

Es sei $Ax = b$ ein LGS mit $\tilde{A} = (A|b) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ in normierter Zeilenstufenform. Das LGS sei lösbar.

Sei k der (Stufen-)Rang von $\tilde{A}$ und sei $d := n - k$.

(Wegen der Lösbarkeit des LGS ist k auch der Rang von A .)

Seien $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k$ die Pivot-Indizes von $\tilde{A}$.

(Es sind auch die von A . Insbesondere ist $j_k \leq n$.)

Seien $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n$ die verschiedenen Nicht-Pivot-Indizes $\leq n$.

(Auch $n+1$ ist Nicht-Pivot-Index, spielt aber eine Extra-Rolle.)

Für $d = 0$ ist die Menge der i_j leer.

Man bildet folgende n -Tupel $X_0, X_1, \dots, X_d$.

Für $d = 0$ gibt es nur das X_0 und keine $X_i, i > 0$

[1] X_0 sei folgendes n -Tupel:

An den Pivot-Koordinaten $j_1, j_2, \dots, j_k$ stehen, in dieser Reihenfolge, die Einträge der letzten, d.h. der $(n+1)$ -ten Spalte von $\tilde{A}$ (der Reihe nach von oben nach unten genommen).

Alle anderen Koordinaten sind 0.

[2] Für $r = 1, 2, \dots, d = n - k$ bilde X_r folgendermaßen:

Der Eintrag in der Koordinate i_r sei 1.

In den Pivot-Koordinaten werden die negativen Werte der Einträge aus der Spalte i_r (von oben nach unten bis zum k -ten Eintrag) eingetragen.

Die restlichen Koordinaten sind 0.

Dann:

X_0 ist eine Lösug des LGS und die $X_1, X_2, \dots, X_d$ sind eine Basis des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Systems. Der Lösungsraum ist also:

$$\begin{aligned} L &:= X_0 + \mathbb{R} \cdot X_1 + \mathbb{R} \cdot X_2 + \dots + \mathbb{R} \cdot X_d. \\ &= \{X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_d X_d \mid \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Angewandt auf unser Beispiel für eine Matrix in normierter Zeilenstufenform:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ j_1 & i_1 & j_2 & j_3 & i_2 & j_4 \end{array}$$

Dabei: $n = 6$, $k = 4$, $d = 2$, $j_1 = 1$, $j_2 = 3$, $j_3 = 4$, $j_4 = 6$, $i_1 = 2$, $i_2 = 5$.

Es sind

$$\left(\begin{array}{c} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \dots \dots \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \bullet \dots \dots \left(\begin{array}{c} -\frac{9}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \bullet$$

Die Punkte kennzeichnen die Pivot-Indizes. Die $\bullet$ kennzeichnen die 1'en an den Nicht-Pivot-Stellen $i_1 = 2$, $i_2 = 5$.

Die Lösungsmenge bei diesem Beispiel ist also

$$L = \left(\begin{array}{c} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \mathbb{R} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \mathbb{R} \left(\begin{array}{c} -\frac{9}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) = \left\{ \left(\begin{array}{c} -\frac{3}{4} + \lambda_1 - \frac{9}{4}\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda_2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{array} \right) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Bemerke: L ist eine Ebene im $\mathbb{R}^6$.

7.3.4 Das Gaußverfahren in der Zusammenfassung

Das vollständige Verfahren zur Bestimmung der Lösungsmenge eines LGS, das wir kennengelernt haben, heißt **Gauß-Verfahren**. Wir geben eine Zusammenfassung:

Grundlegendes Prinzip:

Man bringt das LGS $Ax = b$, d.h. die Matrix $\tilde{A} = (A|b)$, durch elementare Umformungen auf normierte Zeilenstufenform. Dessen Lösungsmenge ist direkt abzulesen und ist auch die Lösungsmenge des Ausgangs-LGS.

Das Gauß-Verfahren im Schema:

Problem: Bestimme die Lösungsmenge des LGS $A \cdot x = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Verfahren:

- 1 Notiere die erweiterte Koeffizientenmatrix $\tilde{A} = (A|b)$.
- 2 Bringe $\tilde{A}$ auf Zeilenstufenform. Der Stufenrang sei k .
Ist $n + 1$ ein Pivot-Index, so ist $Ax = b$ nicht lösbar und das Verfahren ist beendet.
Sind alle Pivot-Indizes $\leq n$, so:
- 3 Bringe $\tilde{A}$ weiter auf normierte Zeilenstufenform.
- 4 Lies X_0 und die $X_1, \dots, X_d$, $d = n - k$, ab.
Die Lösungsmenge des Ausgangs-LGS ist

$$L = X_0 + \mathbb{R}X_1 + \dots + \mathbb{R}X_d$$

Gesamtbeispiel

$$\begin{array}{rclcl}
 -2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 & = & 1 \\
 x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 - x_6 & = & -1 \\
 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 5x_5 - 2x_6 & = & -1 & \text{LGS (*)} \\
 -x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 2x_6 & = & 0 \\
 -x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 - 4x_5 + 3x_6 & = & a
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c}
 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\
 2 & -2 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\
 -1 & 1 & -3 & -3 & -3 & 2 & 0 \\
 -1 & 1 & -1 & -4 & -4 & 3 & a
 \end{array} \leftarrow \tilde{A}$$

$$\begin{array}{cccccc|c}
 \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
 2 & -2 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\
 -1 & 1 & -3 & -3 & -3 & 2 & 0 \\
 -1 & 1 & -1 & -4 & -4 & 3 & a
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 & a-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 & a-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}$$

Offenbar: Letzte Spalte keine Pivot-Spalte $\iff L \neq \emptyset \iff a = -1$.

In diesem Fall, also für $a = -1$, ist man bei der Matrix, die in 7.3.2 auf normierte Zeilenstufenform gebracht worden ist.

Auf normierte Zeilenstufenform gebracht ergibt sie die Ausgangsmatrix für das Ablese-Beispiel in 7.3.3

Schließlich:

Der abgelesene Lösungsraum ist die Ebene L am Ende von 7.3.3.

7.3.5 Berechnung der inversen Matrix

Bemerkung:

Ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihr Rang gleich n ist.

Gleichbedeutend damit ist: Die Matrix in normierter Zeilenstufenform, die aus A durch elementare Zeilenumformungen entsteht, ist die Einheitsmatrix E_n .

Verfahren zum Invertieren einer $n \times n$ -Matrix:

1. Bringe A auf Zeilenstufenform. Ist Stufenrang von A gleich n , so bringe A weiter auf normierte Zeilenstufenform. Andernfalls beende das Verfahren.
2. Parallel zu 1. wende auf E_n die gleichen elementaren Umformungen wie auf A in der gleichen Reihenfolge an.
Hat A die Form E_n erreicht, so ist aus E_n die Inverse A^{-1} von A geworden.

In der Praxis stellt man A und E_n nebeneinander zu $A|E_n$. Man bringt A auf normierte Stufenform. Während links dann E_n erscheint, erhält man rechts das A^{-1} .

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} & \xrightarrow{M(1,2)} & \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \\ \\ \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Probe!}$$

7.3.6 Inverse Matrizen und das offene Leontief-Modell

Bemerkung:

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so hat jedes LGS $Ax = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1}b$. Für die Praxis ist dies nicht bedeutsam, weil das Invertieren einer Matrix aufwendiger ist als das Lösen eines LGS.

Theoretisch ist die Bemerkung die Grundlage eines einfachen klassischen volkswirtschaftlichen Modells:

Das sogenannte **offene Leontief-Modell**:

Situation:

Betrachtet wird eine Volkswirtschaft, bestehend aus n Industrien $I_1, \dots, I_n$, welche die jeweiligen Produkte $P_1, \dots, P_n$ herstellen.

Daten:

Produktionsvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, Nachfragevektor $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$,

Verbrauchsmatrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$.

Dabei sind x_i = Gesamtoutput von $I_i, i = 1, \dots, n$, in Einheiten des Produkts P_i ,
 d_i = von außen nachgefragte Einheiten des Produktes P_i ,
 a_{ij} = Anzahl der Einheiten an P_i , die von der Industrie I_j gebraucht wird, um eine Einheit von P_j herzustellen.

Der ökonomischen Interpretation entsprechend setzt man noch voraus, daß alle $x_i \geq 0$, alle $a_{ij} \geq 0$, alle $d_i \geq 0$ und – bei diesem Modelltyp – mindestens ein $d_i > 0$ sei.

Man bemerkt:

Die Anzahl von Einheiten von P_i , die von den Industrien $I_1, \dots, I_n$ insgesamt verbraucht wird, ist

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \stackrel{!}{=} i\text{-te Koordinate von } A \cdot x.$$

Die Anzahl von Einheiten an P_i , die zum äußeren Verbrauch übrigbleiben, ist daher

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \stackrel{!}{=} i\text{-te Koordinate von } x - A \cdot x$$

Ergebnis:

Die verlangte Nachfrage kann genau dann ohne Abstriche und ohne “Surplus” erfüllt werden, wenn $d = x - A \cdot x$, d.h. wenn das LGS

$$(*) \quad (E_n - A) \cdot x = d$$

eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ hat, wo alle $x_i \geq 0$ sind.

Eine besonders zufriedenstellende Situation:

Besonders zufriedenstellend ist die Situation, wenn $(E_n - A)$ invertierbar ist mit einer inversen Matrix $(E_n - A)^{-1}$, bei der alle Einträge ≥ 0 sind. Denn dann hat $(*)$ für jedes d genau eine Lösung x und deren Koordinaten x_i sind alle ≥ 0 .

Bezeichnungen:

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – uns interessieren in erster Linie quadratische Matrizen und einspaltige Matrizen, also n -Tupel – heißt **nicht-negativ**, wenn alle Einträge $a_{ij} \geq 0$ sind.

Ein nicht negatives $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **produktiv**, wenn $E_n - A$ invertierbar und die inverse Matrix $(E_n - A)^{-1}$ nicht negativ ist.

Tatsache (Ein hinreichendes Kriterium für Produktivität)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht negativ.

Sind alle Spaltensummen kleiner als 1 – d.h. ist $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1$ für alle $j = 1, \dots, n$ –

oder sind alle Zeilensummen kleiner als 1 – d.h. für alle i ist $\sum_{j=1}^n a_{ij} < 1$ –,

so ist A produktiv.

Der Beweis erfordert eine eigene Theorie.

Kommentar:

Daß es – wie die Tatsache belegt – brauchbare produktive Matrizen gibt, ist mathematisch keineswegs selbstverständlich. Das einfache Modell und die Tatsache demonstrieren daher den nicht

selbstverständlichen Sachverhalt, daß es zumindest einfache nicht triviale volkswirtschaftliche Modelle gibt, in denen ein Gleichgewicht zwischen Produktion und Verbrauch besteht.

Wenn das gesichert ist, kann man der Frage nach Gleichgewichtszuständen und Gleichgewichts-“Pfad” in realistischeren Situationen nachgehen, wie es die fortgeschrittene Volkswirtschaftslehre tut.

Ein Zahlenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad E_n - A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad (E_n - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{71}{45} & \frac{53}{45} & \frac{51}{45} \\ \frac{1}{2} & \frac{27}{18} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Für } d = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ ist dann die eindeutige Lösung } x = (E_n - A)^{-1}d = \begin{pmatrix} 282 \\ 225 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

(Nachrechnen als Übung !)

7.4 Determinanten

7.4.1 Definition der Determinante

Motivation: Gegeben $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$.

Betrachte das Parallelotop $P(a_1, a_2, a_3)$ im $\mathbb{R}^3$ mit den Ecken $0, a_1, a_2, a_1 + a_2, a_3, a_3 + a_1, a_3 + a_2, a_3 + a_1 + a_2$ (Zeichnung!).

Gesucht: Eine Formel für das Volumen von $P(a_1, a_2, a_3)$.

Eine solche Formel erhält man mittels der sogenannten Determinante.

Bezeichnung. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$.

Nenne für $1 \leq i, j \leq n$:

$$A_{ij} := \begin{cases} \text{diejenige } ((n-1), (n-1))\text{-Matrix, die man erhält, indem man in} \\ A \text{ die } i\text{-te Zeile und die } j\text{-te Spalte streicht.} \end{cases}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \text{ Dann } A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

Definition (der Determinante einer (n, n) -Matrix)

Die Determinante ist eine Zuordnung, die jeder quadratischen Matrix eine reelle Zahl zuordnet.

Mathematischer gesprochen:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Abbildung

$$\det_n : \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}, A \longmapsto \det_n(A).$$

Die Definition geschieht rekursiv: Wir definieren $\det_1$ und dann $\det_n$ für $n \geq 2$ mit

Hilfe des schon als definiert angenommenen $\det_{n-1}$:

$$\boxed{n = 1} \quad \det_1(a) = \det(a) = a$$

$$\boxed{n \geq 2} \quad \text{Sei } \det_{n-1} \text{ schon definiert f\"ur } n - 1.$$

Dann sei f\"ur $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$\det_n A := \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} \cdot a_{i1} \cdot \det_{n-1} A_{i1}$$

Zur Schreibweise:

Wenn durch die betrachteten Matrizen klar ist, um welches n es sich handelt, schreibt man kurz $\det A$ f\"ur $\det_n A$. Bei konkreten Matrizen A ist es auch \"ublich, die Determinante von A durch "Betragsstriche" an A zu bezeichnen, also z.B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

In niedrigen Dimensionen:

$$\boxed{\text{F\"ur } n = 2} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\boxed{\text{F\"ur } n = 3}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{11}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \end{aligned}$$

Das ist die sogenannte Sarrusregel. Als Ged\"achtnisschema:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \nearrow a_{11} \quad \nearrow a_{12} \quad \nearrow a_{13} \\ \nearrow a_{21} \quad \nearrow a_{22} \quad \nearrow a_{23} \\ \nearrow a_{31} \quad \nearrow a_{32} \quad \nearrow a_{33} \end{array}$$

Mit Plus-Zeichen: Summanden mit Faktoren auf den durchgezogenen diagonalen Linien.

Mit Minus-Zeichen: Summanden mit Faktoren auf den gepunkteten diagonalen Linien.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 + (-4) - 0 - (-2) - 1 = 1$$

7.4.2 Haupteigenschaften

Ad-hoc-Matrixschreibweise: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schreiben wir:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A_i. \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix}, \text{ wo } A_{i.} \text{ die } i\text{-te Zeile von } A \text{ bezeichnet, } i = 1, \dots, n.$$

Satz (Einige wesentliche Eigenschaften):

(D1) Für alle $i = 1, \dots, n$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $A'_{i.}, A''_{i.} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ \lambda \cdot A_{i.} \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A_{i.} \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A'_{i.} + A''_{i.} \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A'_{i.} \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A''_{i.} \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix}$$

Man formuliert (D1) auch so: Die Determinante ist linear in der i -ten Zeile.

(D2) Für alle $1 \leq i, j \leq n, i < j$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A_{j.} \dots i \\ \vdots \\ A_{i.} \dots j \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A_{i.} \dots i \\ \vdots \\ A_{j.} \dots j \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix}$$

In Worten: Vertauscht man in A zwei Zeilen, so ändert $\det A$ das Vorzeichen.

$$(D3) \quad \det E_n = 1$$

(D4) Für alle $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A_{i.} + \lambda A_{j.} \dots i \\ \vdots \\ A_{j.} \dots j \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{1.} \\ \vdots \\ A_{i.} \\ \vdots \\ A_{j.} \\ \vdots \\ A_{n.} \end{pmatrix} = \det A$$

In Worten: Elementare Zeilenumformungen des Typs $M(i,j|\lambda)$ ändern die Determinante nicht.

(D5) $\det A \neq 0 \iff$ Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(D6) $\det A = \det A^t$

In Worten: Beim Transponieren (s. Bez.2 in 6.2.5) einer Matrix ändert sich die Determinante nicht.

Als Folgerung:

Die für die Zeilen von A formulierten Eigenschaften (D1), (D2), (D4), (D5) gelten entsprechend auch für die Spalten.

(D7) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (wichtig und erstaunlich). Daraus und aus (D3):
 $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ für invertierbare A .

(D8) Ist A von der Form $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$ mit $B \in \mathbb{R}^{k \times k}, D \in \mathbb{R}^{r \times r}, C \in \mathbb{R}^{k \times r}$ (man sagt: A hat obere Blocksgestalt), so gilt

$$\det A = \det B \cdot \det D$$

(D9) Hat $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & O & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ obere Dreiecksgestalt, so gilt $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

In Worten: Bei oberen Dreiecksmatrizen ist $\det A$ das Produkt der Diagonalelemente von A .

(D10) Die entsprechenden Aussagen zu (D8) und (D9) gelten auch für untere Blocksgestalt und untere Dreiecksmatrizen.

(D11) Entwicklung nach der j -ten Spalte: Für alle $j = 1, \dots, n$ gilt (mit den A_{ij} wie in der Bezeichnung in 7.4.1):

$$\det A := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det_{n-1} A_{ij}$$

Entwicklung nach der i -ten Zeile: Für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\det A := \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det_{n-1} A_{ij}$$

Bemerge: Die Formel aus der Definition in 7.4.1 ist die Entwicklung nach der ersten Spalte.

Zum Beweis des Satzes: Bei den meisten Eigenschaften muß man beim Beweis einige Arbeit investieren.

7.4.3 Berechnungsvarianten

1

Die induktive Berechnung nach Definition. Allgemeiner:

Man kann eine der Entwicklungsregeln in (D11) anwenden. Das empfiehlt sich insbesondere, wenn in einer Zeile oder Spalte mehrere Nullen vorkommen.

2

Bei Matrizen in der entsprechenden speziellen Gestalt sind die Regeln (D8), (D9), (D10) zur Berechnung von $\det A$ sehr nützlich.

3

Bei normalen Matrizen kann man elementare Zeilenumformungen benutzen. Eine Matrix in Zeilenstufenform hat obere Dreiecksgestalt. Ihre Determinante kann also nach (D9) direkt berechnet werden.

Außerdem: Man entdeckt bei der Herstellung der Zeilenstufenform rechtzeitig, ob die Zeilen linear abhängig sind. Dann ist die Determinante gleich 0 nach (D5).

Zu beachten ist: Bei elementaren Zeilenumformungen des Typs $M(i|\lambda)$ und $M(i,j)$ ändert sich die Determinante, allerdings in kontrollierter Weise: Bei einem $M(i,j)$ ändert sie das Vorzeichen ((D2)), bei einem $M(i|\lambda)$ wird sie mit λ multipliziert ((D1)). Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß Umformungen des Typs $M(i,j|\lambda)$ die Determinante nicht ändern ((D4)).

Berechnungsverfahren in diesem Sinne:

Man bringt die Matrix A auf Zeilenstufenform A' und führt Bilanz über die dabei entstandenen Veränderungen. Es ist dann $\det A' = (-1)^m \cdot \Lambda \cdot \det A$, wo m die Anzahl der vorgenommenen Vertauschungen und wo Λ das Produkt aller Faktoren λ bei den getätigten Modifikationen des Typs $M(i|\lambda)$ ist. Letztlich ergibt sich

$$\det A = (-1)^m \cdot \frac{1}{\Lambda} \cdot \det A'.$$

Anmerkung: Für großes n ist dies die Berechnungsmethode mit dem geringsten Aufwand.

Ein Beispiel: In der Vorlesung.

4

Es gibt auch eine Formel, welche die Sarrusformel in der Dimension 3 auf beliebiges n verallgemeinert. Sie ist jedoch zum Berechnen kaum geeignet. Es ist eine Summenformel mit $n!$ Summanden, wo jeder Summand ein bestimmtes Vorzeichen hat und ein Produkt von n Einträgen der Matrix ist. (Schon das Berechnen der Vorzeichen erfordert einen gewissen Aufwand.)

Bei $n = 5$ gibt es also z.B. 120 Summanden (im Vergleich zu den 6 Summanden bei $n = 3$).

7.4.4 Erste Anwendungen

1 Volumina

Tatsache 1

Das Volumen des Parallelotops (man sagt auch “des Spats”) $P(a_1, a_2, a_3)$ aus der Motivation in 7.4.1 ist der Betrag $|\det(A)|$ der Determinante derjenigen (3,3)-Matrix A , welche die a_1, a_2, a_3 als Spalten (oder als Zeilen, s. (D6)) hat.

Allgemein:

Mit Hilfe der Determinante kann man höherdimensionale Volumina definieren. Generell spielt die Determinante bei der Berechnung von Volumina – auch in der Analysis – eine wichtige Rolle.

2 Ein Kriterium für lineare Unabhängigkeit

Die Eigenschaft (D5) des Satzes und die analoge Eigenschaft für die Spalten liefern ein Kriterium für lineare Unabhängigkeit. Danach gilt nämlich für quadratische Matrizen:

$\det A \neq 0 \iff$ Die Zeilen (genauso: die Spalten) von A sind linear unabhängig.

Beim Beispiel vor dem Satz in 7.4.1 : Die Spalten sind nach diesem Kriterium linear unabhängig.

Bemerke: Die Spalten sind die Tupel, die am Ende von 6.4.4 schon einmal als linear unabhängig identifiziert wurden.

3 Definitheit bei symmetrischen Matrizen

Bemerke:

Es sei A eine (n,n) -Matrix. Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$, so ist $x^t \cdot A \cdot y$ eine reelle Zahl. Genauer: Es ist

$$x^t \cdot A \cdot y = \sum_{i,j=1}^n x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j .$$

Insbesondere: Durch $x \mapsto x^t \cdot A \cdot x$ wird eine Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Solche Abbildungen heißen homogen quadratisch. Sie spielen z.B. in der Analysis bei mehreren Variablen (s. Kap. 4) die Rolle der zweiten Ableitung. Diese Anwendung bereiten wir hier vor. Dabei kann man sich auf symmetrische Matrizen (s. 6.2.5) beschränken.

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Man definiert:

A ist **positiv definit** $:\Leftrightarrow x^t \cdot A \cdot x > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

A ist **negativ definit** $:\Leftrightarrow x^t \cdot A \cdot x < 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

A ist **indefinit** $:\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Es gibt } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x^t \cdot A \cdot x > 0 \\ \text{und } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } y^t \cdot A \cdot y < 0 \end{cases}$

Bezeichnung Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Für $k = 1, 2, \dots, n$ sei $A(k)$ diejenige (k,k) -Matrix, die aus dem Durchschnitt der ersten k Zeilen mit den ersten k Spalten von A besteht.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$

$$A(1) = (-1), \quad A(2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A(3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A(4) = A.$$

Tatsache (Das “Hurwitz”-Kriterium für Definitheit):

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei symmetrisch. Dann gilt:

A ist positiv definit $\Leftrightarrow \det A(k) > 0$ für alle $k = 1, 2, \dots, n$.

A ist negativ definit $\Leftrightarrow \begin{cases} \det A(k) < 0 \text{ für die ungeraden } k, \text{ und} \\ \det A(k) > 0 \text{ für die geraden } k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$

$\left. \begin{array}{l} \det A < 0 \text{ und } A \text{ ist} \\ \text{nicht negativ definit} \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ ist indefinit.}$

Der Beweis ist nicht selbstverständlich und wird ausgelassen.

Anwendung bei der Matrix des Beispiels zuvor:

$$\det A(1) = -1 < 0, \quad \det A(2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \det A(3) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

und $\det A(4) = \det A = 47 > 0$.

Ergebnis: A ist negativ definit.

Als Übung: Berechnen Sie $\det A$ nach den in 7.4.3 vorgeschlagenen Methoden.

4 Das charakteristische Polynom. Eigenwerte. Eigenvektoren

Das ist ein eigenes Kapitel in der Linearen Algebra. Wir werden in den folgenden beiden Nummern nur ganz kurz darauf eingehen. Das sogenannte “geschlossene” Leontief Modell dient als Motivation.

7.4.5 Das geschlossene Leontief-Modell

Die Situation sei wie in 7.3.6 :

Betrachtet werden nicht-negative (s. die Bezeichnung in 7.3.6) $x \in \mathbb{R}^n$ und $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es sei jetzt $d = \mathbf{0}$.

(Daher der Name “geschlossen”: Es gibt keine äußere Nachfrage. Die Volkswirtschaft aus den n Industrien ist “nach außen abgeschottet”.)

Die Frage ist jetzt: Gibt es $x \neq \mathbf{0}$ mit

$$(*) \quad x - A \cdot x = (E_n - A) \cdot x = \mathbf{0} \quad \text{bzw. - äquivalent dazu - mit} \quad A \cdot x = x ?$$

Tatsache

Ist z.B. A eine stochastische Matrix (s.7.1.5), so hat das homogene LGS $(E_n - A) \cdot x = \mathbf{0}$ eine nicht-negative Lösung $x \neq \mathbf{0}$.

Gibt es eine Potenz A^k von A , deren Einträge alle > 0 sind (das ist insbesondere der Fall, wenn alle $a_{ij} > 0$ sind), so ist solch eine Lösung x bis auf einen reellen Faktor eindeutig bestimmt und es ist $x_i > 0$ für alle Koordinaten $i = 1, \dots, n$.

Der Beweis benötigt eine besondere Theorie. Siehe auch den folgenden Abschnitt.

Zahlenbeispiel: Die stochastische Matrix $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$ aus 7.1.5 erfüllt auch die Voraussetzungen des zweiten Teils der Tatsache. Die Lösung ist bis auf einen Faktor eindeutig.

Es folgt: Es gibt genau eine stochastische Lösung. Sie ist bei diesem Beispiel $x = \begin{pmatrix} \frac{34}{61} \\ \frac{14}{61} \\ \frac{13}{61} \end{pmatrix}$.

(Nachrechnen als Übung !)

7.4.6 Eigenwerte. Eigenvektoren. Das charakteristische Polynom

Definition 1 (Eigenwerte. Eigenvektoren.):

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{0} \neq x \in \mathbb{R}^n$. Gilt

$$A \cdot x = \lambda \cdot x,$$

so heißt λ **ein Eigenwert von A mit Eigenvektor x** und x heißt **ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ** .

Anmerkung:

Mit diesen Bezeichnungen stellt sich die Frage beim geschlossenen Leontief-Modell des vorausgehenden Abschnitts folgendermaßen:

Hat die Verbrauchsmatrix A den Eigenwert 1 und gibt es zum Eigenwert 1 einen Eigenvektor, der nicht-negativ ist ?

Beispiele zu den Eigenwerten und Eigenvektoren:

(i) Für die stochastische Matrix $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$ aus 7.4.5 zuvor und für das $x = \begin{pmatrix} \frac{34}{61} \\ \frac{14}{61} \\ \frac{13}{61} \end{pmatrix}$ gilt $A \cdot x = x$. Also: x ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1.

(ii) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 und $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1.

(iii) Eine Lösung $0 \neq x$ eines homogenen LGS $A \cdot x = 0$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 0.

Geometrische Bedeutung:

Ist x ein Eigenvektor von A , so führt die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Gerade $\mathbb{R} \cdot x$ in sich über.

Ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, so ist $\mathbb{R} \cdot x$ eine "Fixgerade": Jeder Punkt von $\mathbb{R} \cdot x$ bleibt fix unter f_A .

Ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, so wird jeder Punkt von $\mathbb{R} \cdot x$ am Nullpunkt "gespiegelt".

Unter diesem Gesichtspunkt: Das f_A zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus Beispiel (ii) ist die Spiegelung an der Diagonalen $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$.

Das als nächstes definierte charakteristische Polynom braucht man, um die Eigenwerte einer Matrix zu bestimmen.

Definition 2 (Das charakteristische Polynom):

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Funktion

$$\chi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \det(\lambda \cdot E_n - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix},$$

heißt **das charakteristische Polynom von A** .

Bemerkung:

Es ist leicht auszurechnen, daß χ_A ein Polynom n -ten Grades in λ ist:

$$\chi_A(\lambda) =: \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0,$$

wobei $\alpha_0 = (-1)^n \det A$.

Satz:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \iff \chi_A(\lambda) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } A \cdot x = \lambda \cdot x \text{ für ein } x \neq \mathbf{0} &\iff (\lambda \cdot E_n - A) \cdot x = \mathbf{0} \text{ für ein } x \neq \mathbf{0} \iff \\ \text{Rang}(\lambda \cdot E_n - A) < n &\stackrel{\text{(D5)}}{\iff} \det(\lambda \cdot E_n - A) = 0 \iff \chi(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Beispiele: (1) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus Beispiel (ii) ist $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$ mit den Nullstellen $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$.

(2) Für die Matrix $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$ aus Beispiel (i) gilt

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,1 & \lambda - 0,2 & -0,6 \\ -0,1 & -0,5 & \lambda - 0,2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \frac{6}{5}\lambda^2 + \frac{1}{100}\lambda + \frac{19}{100} = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \frac{1}{5}\lambda - \frac{19}{100}\right).$$

Offenbar ist 1 Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$. Außer 1 gibt es zwei weitere Eigenwerte von A , nämlich $\lambda = \frac{1}{10}(1 \pm 2\sqrt{5})$ (das sind die Nullstellen von $\lambda^2 - \frac{1}{5}\lambda - \frac{19}{100}$).

7.5 Aufgaben

Aufgabe 1. Für welche reellen Zahlen $t \in \mathbb{R}$ bilden die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen für folgende Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \\ 4x_1 + 8x_2 = 0 \end{array} & \text{c)} & \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 5 \\ 3x_2 + 12x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 3 \\ x_2 + 4x_3 - 1x_4 - 2x_5 = 2 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{array} & \text{d)} & \begin{array}{l} x_1 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 7 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 8 \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 3. In einer Familie hat jeder Sohn dieselbe Anzahl von Schwestern wie Brüder. Jede Tochter hat zweimal so viele Brüder wie Schwestern. wieviele Söhne und Töchter hat die Familie?

Aufgabe 4. Untersuchen sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inversen.:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie für die in Aufgabe 6b von Übungsblatt 9 angegebene Eigenbedarfsmatrix A die Matrix $M^{-1} := (E_3 - A)^{-1}$, sowie Produktionsvektoren zu folgenden Nachfragevektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen (es sei $t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{b)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{c)} & \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{t} & t \\ 0 & 2 & t^2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} t & 5 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2t & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 3t & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4t & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7. Welche der folgenden Matrizen sind positiv oder negativ definit?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$