5 Integrationstheorie

In der Integrationstheorie werden die folgenden zwei Probleme behandelt, die auf den ersten Blick nichts mitinander zu tun haben, die sich aber interessanterweise als ganz eng zusamenhängend herausstellen.

Erstes Problem: Gegeben eine Funktion f . Gesucht ist eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ (eine sogenannte Stammfunktion von f). Das Problem erscheint akademisch, ist aber z.B. in der Physik grundlegend.

Zweites Problem: Man berechne den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen (z.B. von Kreisflächen).

Weitere **Motivation** von anderer Seite:
In der Physik: Berechnung der Arbeit gegen eine variable Kraft.
Aus der Wirtschaftstheorie: Berechnung kontinuierlicher Zahlungsströme.
Mathematische Hintergrundidee: Die Integration ist eine Art kontinuierlicher Summation.

5.1 Grundlegende Theorie

5.1.1 Stammfunktionen

Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine relle Funktion.

Die reelle Funktion , $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Stammfunktion** von f , wenn F differenzierbar ist mit $F' = f$.

Tatsache:
Seien X ein Intervall und seien F, G Stammfunktionen von f . Dann unterscheiden sich F und G nur um eine Konstante. D.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $G - F \equiv c$, also $G = F + c$, also $g(x) = f(x) + c$ für alle $x \in X$.

Beweis: Es ist $(G - F)' = f' - f' \equiv 0$. Also ist $G - F \equiv c$ gemäß der Anwendung in 4.2.1 .

Anmerkung:
Ist der Definitionsbereich von f X kein Intervall, sondern eine Vereinigung von getrennten Intervallen, so ist $G - F$ zwar auf jedem Intervall konstant, aber die Konstante kann von Intervall zu Intervall differieren.

Beispiele von Stammfunktionen:
Haufenweise mittels unserer Ableitungsbeispiele! Um nur einige zu nennen:
Für $q \in \mathbb{R}, q \neq -1$ ist $\dfrac{1}{q+1} x^{q+1}$ eine Stammfunktion von x^q .
Stammfunktion von $\dfrac{1}{x}$ ist der $\ln$.
Stammfunktion vom Kosinus ist der Sinus.

Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ist der Arkussinus.
Usw.: Siehe die Angabe der Ableitungen in der Liste der elementaren Funktionen.

(Etwas vage) **Bezeichnung**:
Eine reelle Funktion heiße **geschlossen darstellbar**, wenn sie durch iterierte Anwendung von Linearkombinationen, Produktbildung, Quotientenbildung und Einsetzen in andere Funktionen aus den elementaren Funktionen hervorgeht. (Z.B. $f(x) = \sqrt[7]{\ln\left(x^{\frac{2}{3}} \cdot \arctan(x^3)\right)} \cdot \frac{e^{\sin x^2}}{\sin\left(e^x\right)}$).

Bemerkung:
Die Ableitung f' eines solchen geschlossen darstellbaren f ist wieder geschlossen darstellbar und f ist Stammfunktion von f' .

Beweis: Induktiv, mittels unserer Ableitungslisten und den Ableitungsregeln in 4.1.5 .

Im Gegenteil dazu:
Es gibt – sogar relativ einfache – geschlossen darstellbare Funktionen, die keine geschlossen darstellbare Stammfunktionen haben.
Dazu gehören z.B. die Funktionen $\frac{sin\, x}{x}, e^{-\frac{1}{x^2}}$ und andere.

Beweis: Sehr anspruchsvoll.Auch bei den Mathematikern nur in Spezialvorlesungen.

5.1.2 Das bestimmte Integral

Schon im Altertum hat man die Flächeninhalte krummlinig begrenzter Flächen durch "Ausschöpfung"bestimmt, d.h. durch einen Limesprozeß, bei dem die Fläche immer genauer durch das Innere von Polygone approximiert wurde. Polygonflächen lassen sich nämlich elementar berechnen.

Diejenigen Flächen mit (teilweise) krummlinigen Grenzen, die einer mathematischen Behandlung besonders zugänglich sind, sind die Flächen zwischen dem Schaubilds einer Funktion und der x-Achse.

Generelle Voraussetzung:
Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Wir setzen voraus, daß f beschränkt ist (d.h. es gibt $C > 0$ mit $f(x) \leq C$ für alle $x \in [a,b]$).

Gesucht:
Der Flächeinhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse, an den Rändern begrenzt durch die zur y-Achse parallelen Geraden durch die Abszissenpunkte a und b .

Bezeichnungen 1 :
Eine **Zerlegung** (oder Unterteilung) des Intervalls $[a,b]$ ist eine endliche Folge $Z = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$ von Punkten mit $\quad a := x_0 < x_1 < x_0 < ... < x_{n-1} < x_n := b.$
Das Maximum der Zahlen $x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, ..., n$ (d.h. der Abstände von benachbarten Zerlegungspunkten) heißt die **Maschenweite** von Z .
Zu f und Z und $i, 1 \leq i \leq n$ seien definiert:

m_i := Infimum von $\{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$ und M_i := Supremum von $\{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$.
(Bei stetigen Funktionen f ist m_i das Minimum und M_i das Maximum von f in den Intervallstücken $[x_{i-1}, x_i]$.)

$O(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, die "Obersumme" von f zu Z ,

$U(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, die "Untersumme" von f zu Z ,

Bemerke: $O(f,Z)$:= Flächeninhalt unter der "großen" Treppenfunktion (s. Bild),
$U(f,Z)$:= Flächeninhalt unter der "kleinen" Treppenfunktion

$\mathcal{O}(f) := \{ O(f,Z) \mid Z \text{ eine Zerlegung von } [a,b] \}$
$\mathcal{U}(f) := \{ O(f,Z) \mid Z \text{ eine Zerlegung von } [a,b] \}$

$\overline{\int} f \;:=$ Infimum von $\mathrm{O}(f)$, genannt "Oberintegral" von f ,

$\underline{\int} f \;:=$ Supremum von $\mathrm{U}(f)$, genannt "Unterintegral" von f

Feststellung

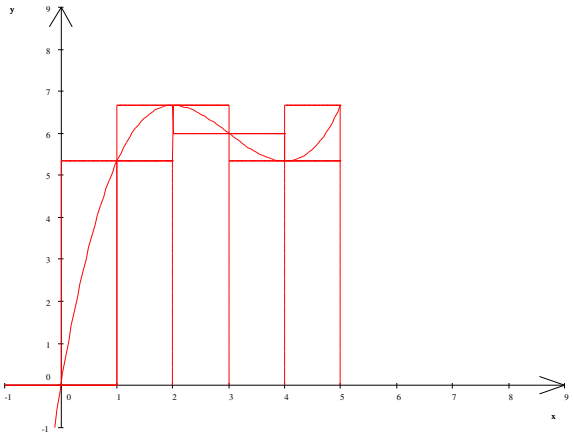
Oberintegral und Unterintegral existieren, weil f beschränkt ist, und es ist $\overline{\int} f \;\geq\; \underline{\int} f$.

Hauptdefinition (Integrierbarkeit):

f ist (Riemannsch) integrierbar $:\Longleftrightarrow \quad \overline{\int} f \;=\; \underline{\int} f$

Dann: Die Zahl $\overline{\int} f \;=\; \underline{\int} f$ heißt das **Integral von** f über $[a,b]$.

Schreibweisen dafür: $\int_a^b f$ oder $\int_a^b f(x)\,dx \qquad (= \int_a^b f(t)\,dt\;)\;)$



Deutung des Integrals:
Für Funktionen f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ – kurz durch $f \geq 0$ ausgedrückt – ist das Integral gerade der im Problem gesuchte Flächeninhalt.
Vorsicht: Flächenstücke unterhalb der x-Achse – also bei Intervallstücken, wo $f \leq 0$ – gehen mit negativem Vorzeichen in das Integral ein. Wir kommen bei Beispielen nochmal darauf zurück.

Saloppe Deutung der Integrierbarkeit:
Die Fläche zwischen f und der x-Achse wird von den Obersummen und den Untersummen in die Zange genommen. Wenn sich die Zange schließen läßt, ist die Funktion integrierbar.

Beispiel:
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei konstant , $f :\equiv c$. Dann:
Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ ist $M_i = m_i = c$ für alle $i = 1,2,...,n$ und somit
$O(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} c \cdot (\, x_i - x_{i-1}\,) \;=\; (\cancel{x_1} - a + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + ... + \cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}} + b - \cancel{x_{n-1}}\,)$
$= c \cdot (b-a) \overset{!}{=} U(f,Z)$.
Also ist $\mathcal{O}(f) = \{\, c \cdot (b-a)\} = \mathcal{U}(f)$ (einelementige Menge).
Somit: f ist integriebar mit $\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b-a)$, wie erwartet.
Weitere Beispiele später. Denn: Die Direkte Bestimmung des Integrals mittels der Definition wird praktisch nie durchgeführt. Konkrete Beispiele benutzen fast immer den Fundamentalsatz in 5.1.6. Siehe dort.
Man kann allgemein die Integrierbarkeit für sehr große Klassen von Funktionen beweisen. Siehe das Folgende.

5.1.3 Klassen integrierbarer Funktionen

Man kann – noch ganz allgemein – die Integrierbarkeit für sehr große Klassen von Funktionen beweisen.

Satz 1 :
(1) Jedes monotone f ist integrierbar.
(2) Jedes stetige f ist integrierbar.

Bemerke: Solche Funktionen sind beschränkt (Beweis!). Der Beweis von (1) und (2) ist dann nicht allzu schwer.

Satz 2 :

(1) Sei f integrierbar. Dann:
f bleibt integrierbar, wenn man an endlich vielen Stellen den Funktionswert abändert. Das Integral ändert sich dabei nicht.

(2) Sei $(x_n)_{n=1,2,...}$ eine Folge von Punkten in $[a,b]$. Das f sei stetig in allen $x \neq x_n, n = 1,2,...,$ und f habe Sprungstellen in den x_n . Dann ist f integrierbar.

Beweise: Schon etwas schwieriger.

Fazit:
Alle elementaren Funktionen sind integrierbar über abgeschlossene Intervalle ihres Definitionsbereiches (weil stetig).
Und: Integrierbarkeit ist eine recht "robuste" Eigenschaft.

5.1.4 Allgemeine Eigenschaften des Integrals

Bezeichnung als Übereinkunft:
Sei f integrierbar über $[a,b]$. Man setzt:

$$\int_b^a f(x)\,dx \;:=\; -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_a^a f(x)\,dx \;:=\; 0.$$

↖ Integrationsgrenzen vertauscht

Satz:
$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien integrierbare Funktionen, α, β seien aus $\mathbb{R}$. Dann

(1) Sei $a < c < d < b$. Dann existiert auch $\int_c^d f(x)\,dx$.

(2) Sei $a < c < b$. Dann ist $\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_c^b f(x), dx$.
(Zerlegbarkeit bei Zwischenpunkten)

(3) $\int_a^b (\,\alpha\, f(x) \;+ \beta\, g(x)\,)\,dx \;:=\; \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$.
(Linearität des Integrals)

(4) Ist $f \le g$, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx \;\le\; \int_a^b g(x)\,dx$.
(Monotonie des Integrals)

(5) Auch $|f|,\ x \longmapsto |f(x)|$, ist integrierbar und es ist $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\le\; \int_a^b |f(x)|\,dx$.

(6) $f \cdot g$ ist integrierbar.

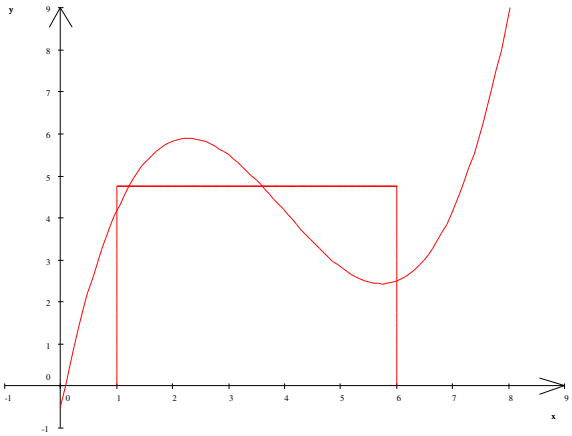
Beweise: Unterschiedlich schwer, aber relativ "straightforward"..

Beachte zu (6): Das Integral von $f \cdot g$ ist nicht das Produkt der Integrale. (S. 5.2.2)

5.1.5 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung (MWSI))
Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

Es gibt $x_0 \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\cdot(b-a)$.



Deutung: Fläche unter der Kurve $=$ $\begin{cases} \text{Fläche des Rechtecks über} \\ [a,b] \text{ mit Höhe } f(x_0) \text{ .} \end{cases}$

Beweis: Es sei $m := min\{\, f(x) \,|\, a \le x \le b \,\}$ und $M := min\{\, f(x) \,|\, a \le x \le b \,\}$.
Dann:

$$m \underset{\text{konstante Funktionen}}{\overset{\nwarrow}{\le}} f(x) \overset{\nearrow}{\le} M \qquad \text{für alle } x \in [a,b] \text{ .}$$

Nach (5) des Satzes in 5.1.4 und dem Beispiel in 5.1.2 gilt dann:

$$m\cdot(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M\cdot(b-a)\,.$$

$$\underset{\text{(kürzen durch } b-a\text{)}}{\Longrightarrow} \qquad m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Zwischenwertsatz} \longrightarrow \; \| \; f(x_0)} \le M \text{ .}$$

Aus $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = x_0$ folgt dann die Behauptung durch Erweitern mit $b-a$.

5.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Integrationspraxis

5.2.1 Integralfunktionen (Unbestimmte Integrale)

Bemerkung 1

X sei ein Intervall, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig $x_0 \in X$

Dann: ↙ Argument x von F ist Integrationsgrenze

$$F : X \longrightarrow \mathbb{R},\ F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

ist eine wohldefinierte Funktion.

Folgt aus der Bezeichnung und (1) des Satzes in 5.1.4 .

Bezeichnung 1

Das F aus der Bemerkung 1 heißt **Integralfunktion** oder **unbestimmtes Integral** zu f .

5.2.2 Das Herz von Theorie und Praxis: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (H-S)):
X sei ein Intervall, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und es sei $x_0 \in X$.

(1) Die Integralfunktion $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} xf(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f$$

ist eine Stammfunktion von f , d.h. es ist $F' = f$.

(2) Seien $a, b \in X$, $a < b$ und $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sei irgendeine Stammfunktion von f. Dann:

$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) =: G(x)\big|_a^b$ (Letzteres ist eine Schreibweise)

Beweis:

(1) $$\frac{\int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f}{h} \underset{\uparrow\ \text{"5.1.4Bezeichnung}}{=} \frac{\int_{x_0}^{x+h} f + \int_{x}^{x_0} f}{h} \underset{\uparrow\ \text{Tats.1(3)}}{=} \frac{\int_{x}^{x+h} f}{h} \underset{\uparrow\ \text{MWSI mit } \xi}{=} \frac{f(\xi)\cdot h}{h} =$$

$$= f(\xi) \overset{\text{f stetig}}{\underset{\text{h}\to 0}{\longrightarrow}} f(x_0)$$

(2) $G \underset{\uparrow\ \text{Bem.1(2)}}{=} F + c \Longrightarrow G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$. Also:

$$\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

Beispiele:

Alle Differenziationen, umgekehrt gesehen. Etwa:

(1) Für $\alpha \neq -1$: $\int_a^b x^\alpha dx \;=\; \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\Big|_a^b = \;\frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$
(dabei sei $0 \notin [a,b]$, falls $\alpha < 0$)

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \;=\; \sin x\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \;\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin(-\tfrac{\pi}{2}) \;=\; 1+1 \;=\; 2$

(3) $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx \;=\; \sin x\big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \;\sin\tfrac{3\pi}{2} - \sin(-\tfrac{3\pi}{2}) \;=\; -1-1 \;=\; -2$

Hier tritt das Phänomen auf, daß bei Integrieren die Flächenteile unterhalb der x-Achse mit negativem Vozeichen in die Rechnung eingehen (und sich atwa, wie in diesem Beispiel, mit entsprechenden Flächen oberhalb der x-Achse aufheben).

(4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \arcsin\big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \;\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \;=\; \frac{\pi}{3}.$

Würdigung des Hauptsatzes:
Das Integral ist auf recht komplizierte Weise definiert. Durch die (verblüffenden) Aussagen des Hauptsatzes wird das Integrieren auf das Differenzieren zurückgeführt.
In den folgenden beiden Abschnitten werden wir sehen, wie Differenziationsregeln zu Integrationsregeln führen.

5.2.3 Substitutionsregel

Die Substitutionsregel ist das Pendant zur Kettenregel!

Satz (Substitutionsregel):
X sei ein Intervall. Gegeben seien

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \quad \text{und} \quad \varphi : [a,b] \longrightarrow X \text{ stetig diferenzierbar.}$$

Dann:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx \;.$$

Beweis F sei Stammfunktion von f, $(F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$,
also

$$F \circ \varphi \text{ ist Stammfunktion von } (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Daher nach dem Hauptsatz :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \underset{\text{H.}-\text{S}}{=} F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \overset{\text{H}-\text{S}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx \qquad \square$$

Symbolische Schreibweise und Umrechnung:

Aus $x = \varphi(t)$: $\quad \dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ bzw. $dx = \varphi'(t)dt$ bzw. $dt = \dfrac{dx}{\varphi'(t)}$.

Beispiele:

(1) $$\int_a^b t \cdot f(t^2)\,dt \underset{\uparrow}{=} \tfrac{1}{2}\int_a^b \varphi'(t)\cdot f(\varphi(t))\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\,dx$$
$x = \varphi(t) = t^2$
$2{\cdot}t\,dt = dx$

(2) $\varphi : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und es sei $\varphi(t) \neq 0$ in $[a,b]$. Dann:

$$\int_a^b \tfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt \overset{(*)}{=} \ln|\,\varphi(t)\,|_a^b \quad .$$
$\uparrow$
$(\, f(x) = \frac{1}{x}, x = \varphi(t)\,)$

Beachte: Die Gleichung $(*)$ gilt sowohl, wenn alle $\varphi(t) > 0$ als auch wenn alle $\varphi(t) < 0$.

Erinnere (4.1.6): $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ heißt logarithmische Ableitung von φ .

Spezialfall der Gleichung $(*)$:

Für $[a,b] \subseteq \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt

$$\int_a^b \tan x\,dx = \int_a^b \tfrac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_a^b \tfrac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln \cos t\Big|_a^b = \ln \cos a - \ln \cos b\,.$$

5.2.4 Partielle Integration

Die partielle Integration ist das Pendant zur Produktregel. Sie liefert eine Methode, um Produkte von Funktionen zu integrieren.

Satz (Partielle Integration):
$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar.
Dann

$$\int_a^b f'{\cdot}g = (f{\cdot}g)\Big|_a^b - \int_a^b f{\cdot}g'$$

Beweis $\quad (f{\cdot}g)' = f'{\cdot}g + f{\cdot}g' \Longrightarrow \int_a^b f'{\cdot}g + \int_a^b f{\cdot}g' = \int_a^b (f{\cdot}g)' \underset{\text{H-S}}{=} (f{\cdot}g)\Big|_a^b$

Beispiele

(1) Für $\alpha \neq -1$ hat man

$$\int_a^b \underset{\uparrow}{x^\alpha}{\cdot}\underset{\uparrow}{\ln x}\,dx = \tfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}{\cdot}\ln x\Big|_a^b - \tfrac{1}{\alpha+1}\int_a^b \underbrace{\frac{x^{\alpha+1}}{x}}_{=x^\alpha}\,dx = \tfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}(\ln x - \tfrac{1}{\alpha+1})\Big|_a^b$$
$f' \quad g$
$$= \tfrac{1}{\alpha+1}b^{\alpha+1}(\ln b - \tfrac{1}{\alpha+1}) - \tfrac{1}{\alpha+1}a^{\alpha+1}(\ln a - \tfrac{1}{\alpha+1})$$

Der Fall $\alpha = -1$, das ist der Fall $\int\limits_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$, erlaubt zwei Vorgehensweisen:

(i) Partielle Integration:

$$I := \int\limits_a^b \tfrac{1}{x}\ln x\; dx \;=\; \ln x{\cdot}\ln x\Big|_a^b \;-\; \underbrace{\int\limits_a^b \ln x\,\frac{1}{x}\,dx}_{=\,I} \;\Longrightarrow\; 2I \;=\; (\ln x)^2\Big|_a^b$$

Also: $I \;=\; \frac{1}{2}\big(\,(\ln b)^2 - (\ln a)^2\,\big)$.

(ii) Substitution:

$$I := \int\limits_a^b \tfrac{1}{x}\ln x\; dx \qquad = \qquad \int\limits_{ln\,a}^{\ln b} t\,dt \;=\; \tfrac{1}{2}t^2\Big|_{\ln a}^{\ln b} \;=\; \tfrac{1}{2}\big(\,(\ln b)^2 - (\ln a)^2\,\big)$$

$$\uparrow$$

$$\begin{array}{l}\ln x = t\\ dt = \frac{1}{x}\,dx\end{array} \quad \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad = \qquad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1\,-\,\sin^2 t}\;\cos t\,dt \;=$$

$$\uparrow$$

$$\begin{array}{c}x = \sin t\\ dx = \cos t\,dt\end{array}$$

(2) Koppelung der Methoden:

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underset{\uparrow}{\cos t}{\cdot}\underset{\uparrow}{\cos t}\,dt \;=\; (\sin t{\cdot}\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;+\; \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt \;=$$

$$\begin{array}{ll}\uparrow & \uparrow\\ f' & g\end{array}$$

Fläche des halben Einheitskreises

$$= \;(\sin t{\cdot}\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;+\; \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt \;-\; I \quad\Longrightarrow\quad I \;=\; \tfrac{1}{2}\big(\,(\sin t{\cdot}\cos t \,+\, t)\big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \tfrac{\pi}{2}\;.$$

5.2.5 Uneigentliche Integrale

Unter Umständen kann man bisherige Grundvoraussetzungen aufgeben:

1 Unendliches Integrationsintervall

Definition 1:

Gegeben sei $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Existiert $\int\limits_a^b f(x)dx \;=:\; F(b)$ für alle $b > a$ und existiert $\lim\limits_{b\to\infty} F(b) = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$,

so heißt f **(uneigentlich) integrierbar** über $[a,\infty)$ und man setzt:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx \;:=\; \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Eine analoge Definition gilt für $f : (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx \;:=\; \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Bemerkung:
Ist f stetig und F eine Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\beta\to\infty} F(\beta) - F(a),$$

d.h. die linke Seite existiert genau dann, wenn $\lim\limits_{\beta\to\infty} F(b)$ existiert und dann gilt die angegebne Gleichung.

Beispiele:

(1) $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x} = \lim_{b\to\infty}(e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = 1$$

(2) Für $s \in \mathbb{R}$ hat man:

$$\int_1^b \tfrac{1}{x^s}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln x\Big|_1^b = \ln b & \text{falls } s = 1 \\ \frac{1}{-s+1}\cdot x^{-s+1}\Big|_1^b & \text{falls } s \neq 1 \end{array} \right\} \underset{\mathrm{b}\to\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} \infty & \text{falls } s = 1 \\ \infty & \text{falls } s < 1, \text{ d.h. } -s+1 > 0 \\ \frac{1}{s-1} & \text{falls } s > 1, \text{ d.h. } -s+1 < 0 \end{array} \right.$$

Ergebnis: $\int_1^b \frac{1}{x^s}\,dx$ existiert $\iff s > -1$.

2 $[a,b]$ endlich, aber f nicht mehr beschränkt

Definition 2:

Gegeben sei $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{\beta\to b} f(\beta) = \pm\infty$.

Existieren $\int_a^\beta f(x)\,dx$ für alle $a < \beta < b$ und existiert $\lim\limits_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)\,dx$,
so definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Analog im Falle $\lim\limits_{\alpha\to a} f(\alpha) = \pm\infty$, $f : (a,b] \longrightarrow \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to a}\int_\alpha^b f(x)\,dx\,, \quad \text{wo } a < \alpha < \beta\,.$$

Beispiel 3:

$$\int_0^1 x^s\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \lim\limits_{\alpha\to 0}\ln\alpha & \text{falls } s = -1 \\ \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{s+1}x^{s+1}\Big|_0^1 & \text{falls } s \neq -1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{falls } s = -1 \\ \infty & \text{falls } s < -1 \\ \frac{1}{s+1} & \text{falls } s > -1 \end{array} \right.$$

Ergebnis: $\int_0^1 x^s\,dx$ existiert $\Longleftrightarrow s > -1$. 2 Diagramme

3 Kombination von 1 und 2

$$\text{Es sei } \begin{cases} a = -\infty & \text{oder} \quad \lim\limits_{\alpha \to a} f(\alpha) = \pm\infty \\ & \text{und} \\ b = \infty & \text{oder} \quad \lim\limits_{\beta \to b} f(\beta) = \pm\infty \end{cases} . \qquad \text{Dann:}$$

Wähle $c \in]a, b[$. Setze:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \left(\begin{array}{l}\text{falls beide Integrale}\\ \text{rechts existieren}\end{array}\right)$$

Beispiel:

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{-\infty} e^{-x}\,dx = 1 + 1 = 2$ (s.o.)

(5) Ohne Beweis, wesentlich schwieriger (weil e^{-x^2} keine geschlossen darstellbare Stammfunktion besitzt), in der Statistik benutzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Bemerkung: Die Limites von Intgralen in diesem Abschnitt sind immer Limites von Integralfunktionen (5.2.1) gewesen.
Sind solche Limites konvergent gegen $\pm\infty$ im Sinne von 3..5 , so setzen wir die berechneten Iniegrale auch gleich $\pm\infty$. Z.B.ist $\int_0^1 x^s\,dx \;=\; \infty$ für $s < -1$ (s.Beispiel 3).
Beim Anwenden der Eigenschaft (3) des Satzes in 5.1. kann man auch mit diesen Limites rechnen wie früher (s.3.3.6 , erste und zweite Regel).

5.2.6 Ein Integralvergleichskriterium für Reihen

Tatsache:
Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f : [m, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ sei monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Longleftrightarrow \int_m^{\infty} f(x)\,dx \text{ existiert.}$$

Es gelten die Abschätzungen

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \;\leq\; \int_m^{\infty} f(x)\,dx \;\leq\; \sum_{n=m}^{\infty} f(n)\,.$$

Beweis: Man erkennt, daß die Abschätzungen gelten (s. Abbildung). Die Konvergenzaussagen folgen aus den Monotoniekriterien.

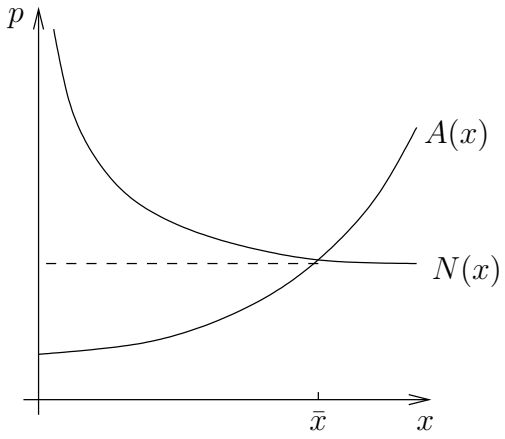
5.3 Integrale in der Ökonomie

5.3.1 Konsumenten- und Produzentenrente

"Polypolistische" Situation: viele Anbieter, viele Nachfrager, freier Markt

x	Menge eines Guts im Angebot, $x_0 \leq x \leq C$
$p(x)$	Preis für x

Nachfragefunktion $n(x)$ und Angebotsfunktion $a(x)$:



Dabei:
$n(x)$ fallend, denn
je höher der Preis, desto niedriger die Nachfrage.
$a(x)$ steigend, denn
je höher der Marktpreis ,desto
höher das Angebot

Gleichgewichtsmenge $\overline{x}$ und Gleichgewichtspreispreis $\overline{p}$ definiert durch

$$\overline{p} := n(\overline{x}) = a(\overline{x}) \qquad \text{("Marktpreis")}$$

Man betrachtt nun eine Zerlgung $Z : x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \overline{x}$.
Vorstellung: Die Mengen zwischen x_{i-1} und x_i hätten auch noch zum Preis $n(x_i)$ verkauft werden können. Die Käufer, die dann gekauft hätten, haben, weil sie die Ware zum niedrigeren Marktpreis bekommen, einen "theoretischen Gewinn"

$$\underbrace{n(x_i)(x_i - x_{i-1})}_{\text{zu zahlen bereit}} - \underbrace{\overline{p} \cdot (x_i - x_{i-1})}_{\text{tatsächlich gezahlt}}$$

Die gesamte Konsumentenschaft hat in diesem Sinn einen theoretischen Gewinn von:

$$\sum_{i=1}^{n} n(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \overline{p} \cdot \overline{x} \quad \stackrel{!}{=} \quad \underbrace{U(n, Z)}_{\substack{\uparrow \\ \text{denn } n(x_i)=m_i, \text{da n fallend}}} \quad - \quad \overline{p} \cdot \overline{x}$$

Im Endeffekt: Bei immer "maschenfeineren" Partitionen konvergiert dieser theoretische Gewinn gegen die sogenannte

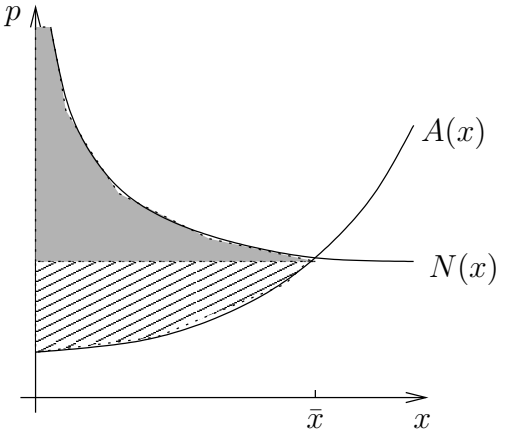
$$\textbf{Konsumentenrente} := \int_0^{\overline{x}} n(x)\,dx - \overline{p}\cdot\overline{x}$$

Analog: Gemäß Angebotsfunktion würden viele Produzenten auch unter dem Marktpreis verkaufen. Sie erzielen einen zusätzlichen theoretischen Gewinn, da sie ja tatsächlich zum höheren Marktpreis das Geschäft abschließen.
Der Gewinn:

$$\overline{p}\cdot\overline{x} - \sum_1^n a_i\cdot(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) \underset{\text{Z immer feiner}}{\longrightarrow}$$

$$\overline{p}\cdot\overline{x} - \int_0^{\overline{x}} a(x)\,dx =: \textbf{Produzentenrente}$$

Anschaulich:



Konsumentenrente = Inhalt der grauen Fläche
Produzentenrente = Inhalt der schraffierten Fläche

5.3.2 Kapitalwert eines Ertragsstroms

In der Ökonomie untersucht man des öfteren den Zusammenhang zweischen sogenannten **Bestandsgrößen** (wie z.B gesamtwirtschaftlicher Kapitalstock, Ölvorkommen usw.) und den zugehörigen sogenannten **Flußgrößen** (gesamtwirtschaftliche Nettoinvestition, Ölförderung usw). Bestandsgrößen sind dann Integrale der Flußgrößen.

Bei uns:
$B(t) :=$ Erwirtschafteter Ertrag zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$,
$b(t) = B'(t)$ sei der "Ertragsstrom".
Der Ertrag werde laufend auf ein Konto eingezahlt und dort stetig verzinst zur Zinsrate von $\alpha = \frac{p}{100}$.
Der **Endwert** $K(t)$ sei der Kontostand nach T Jahren.
Der **Gegenwartswert (Barwert)** $k(t)$ ist diejenige Geldmenge, die, zum Zeitpunkt $t = 0$ mit stetiger Verzinsung zu α angelegt, nach T Jahren den Endwert ergeben würde. Man leitet her:

Endwert $K(T) := e^{\alpha T} \cdot \int_0^T b(t) \cdot e^{-\alpha t\, dt}$

Barwert $k(T) := \int_0^T b(t) \cdot e^{-\alpha t}\, dt$

5.4 Aufgaben

Aufgabe 1. Bestimmen Sie folgende Stammfunktionen:

a) $\int (\frac{4}{x} + x - 4)dx$ b) $\int \cos(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} - e^{-x}dx$ c) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2}dx$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_1^e x \ln(x^2)dx$ c) $\int_0^\pi \sin(x)(\cos(x))^2dx$ e) $\int_1^5 (\frac{2}{x^2} + (x^{\frac{1}{5}} + 1)^2)dx$

b) $\int_{-2}^0 e^x(x^2 + 2x - 1)dx$ d) $\int_0^1 \frac{z - 3}{z^2 - 6z + 1}dx$

Aufgabe 3. Ein Haushalt habe bzgl. des Konsums eines Gutes x die Grenznutzenfunktion $\ln(x)$. Bestimmen Sie die Nutzenfunktion $U(x)$ des Haushalts für $x \geq 0$.

Aufgabe 4. Sie haben das Patent zur Herstellung von selbstreinigenden Windschutzscheiben für Pkw. Als Monopolist legen Sie die Preise nach den Grenzkosten fest, und zwar wie folgt:
Der Preis f für die $x$te Windschutzscheibe für Mengen x bis 1000 beträgt $f(x) = 200 - \frac{x}{10}$. Werden mehr als 1000 Einheiten abgenommen, so bestimmt sich f nach der Formel $f(x) = \frac{100\,000}{x}$. (Die ersten 1000 Einheiten werden aber auf jeden Fall nach den alten Preisen abgerechnet. Ermitteln Sie die Gesamtkosten, sowie die Durchschnittskosten pro Windschutzscheibe, für einen Kunden in Abhängigkeit von der insgesamt abgenommenen Menge. Skizzieren Sie die Grenzkosten-, sowie die Durchschnittskostenfunktion.

Aufgabe 5. Sei

$$N(p) = (\frac{1}{3})^{((p+1)^2)}(p + 1)$$

die Nachfragefunktion eines Produkts in Millionen Stück. Skizzieren Sie die Nachfragefunktion und zeichnen Sie den Umsatz des Unternehmens (Monopolist) bei einem Preis $p_0 = 0,60$ EUR ein. Nach einer Ausweitung der Produktion senkt der Unternehmer den Preis auf $p_1 = 0,30$ Cent. Tragen Sie den Gesamtumsatz ein. (Die Nachfrage für $p_0$wurde zunächst voll befriedigt.)
Wie sähe der Gesamtumsatz aus, wenn der Unternehmer – bei jeweiliger Abschöpfung der Nachfrage – den Preis in 10 Cent – Schritten von p_0 bis p_1 Cent gesenkt hätte?
Berechnen Sie den Gesamtumsatz bei einer stetigen Preissenkung von p_0 bis p_1, also das Integral $\int_{p_1}^{p_0} N(p)dp$.