

4 Differenzierbarkeit. Kurvendiskussion

4.1 Grundlegendes über Differenzierbarkeit

4.1.1 Definition der Differenzierbarkeit

Wir geben gleich die Definition. Motiviert wird sie durch die unten beschriebenen verschiedenen Möglichkeiten der Interpretation.

Definition (Ableitung und Differenzierbarkeit)

Es sei X ein Intervall, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion und es sei $x_0 \in X$. Dann:

f heißt **differenzierbar in** $x_0 \iff$ der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Ist $\alpha := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ dieser Limes, so heißt α die **Ableitung von f in x_0**

Man schreibt dann:

$$f'(x_0) := \alpha (= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}).$$

Die Funktion f heißt **differenzierbar** $\iff f$ ist differenzierbar in jedem $x_0 \in X$.

Man hat dann eine Funktion $f' : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$.

Dieses f' heißt dann die **Ableitung von f** .

Eine andere gebräuchliche Schreibweise: $\frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$ und $\frac{df}{dx} := f'$.

“Einseitige” Varianten:

Existiert der linksseitige Limes $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$ bzw. der rechtsseitige

Limes $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \beta$, so heißen α bzw. β die **linksseitige** bzw. die **rechtsseitige Ableitung** von f in x_0 .

Wie üblich: Das f ist genau dann differenzierbar in x_0 , wenn beide einseitigen Ableitungen existieren und gleich sind.

Einfachste Beispiele

Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Ableitung der konstanten Funktion $f(x) \equiv a$ ist die Nullfunktion: $f' \equiv 0$.

Die Ableitung des Polynoms ersten Grades $g(x) = ax + b$ ist die konstante Funktion $g' \equiv a$.

$$\begin{aligned} \text{Beweis} \quad & \text{In diesen Fällen sind bereits } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a - a}{x - x_0} \equiv 0 \text{ und} \\ & \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} \equiv a \end{aligned}$$

Einfaches Gegenbeispiel

Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto |x|$, ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

$$\text{Man rechnet nach } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Daraus: Die linksseitige Ableitung von f in 0 ist -1 , die rechtsseitige ist 1 . Da diese beiden verschieden sind, ist $|x|$ nicht differenzierbar in 0.

Interpretation der Ableitung:

- “Geometrisch” als Anstieg der Tangente, s. Vorlesung
- “Dynamisch” als Momentangeschwindigkeit, s. Vorlesung
- “Als lineare Approximation”, s. 4.1.2

Bezeichnungsweise in der Ökonomie

In der Ökonomie werden die Ableitungen diverser Funktionen im allgemeinen durch das Präfix “Grenz-” bezeichnet. Zum Beispiel:

Die Ableitung der Kosten(-funktion) heißt die **Grenzkosten(-funktion)**

Die Ableitung vom Erlös heißt der **Grenzerlös** usw.

Eine **Variante der Definition:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition. Für $x \in X$, $x \neq x_0$ und für $h \neq 0$, $x_0 + h \in X$ sei $h = x - x_0$ und $x = x_0 + h$. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Das soll bedeuten: Der Limes auf der einen Seite existiert genau dann wenn der auf der anderen Seite existiert und in diesem Falle sind beide Limes gleich.

Insbesondere also: Man kann die Ableitung von f in x_0 auch mittels der rechten Seite definieren.

4.1.2 Differenzierbarkeit und lineare Approximation

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition in 4.1.1 und es sei $f'(x_0) = \alpha$.

Bezeichnung 1

Für $x \in X$ sei

$$r(x) := f(x) - f(x_0) - \alpha \cdot (x - x_0),$$

so daß also

$$f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + r(x).$$

Das $r(x)$ heiße der Rest von f bezüglich x_0 .

Behauptung

$$\text{Es ist: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha.$$

$$\text{Beweis: Es ist } \frac{r(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \alpha \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha - \alpha = 0 .$$

Es ergibt sich folgende **Interpretation der Differenzierbarkeit**:

$$f \text{ ist differenzierbar in } x_0 \text{ mit Ableitung } \alpha \iff \begin{cases} \text{Es ist } f(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0) + r(x) \\ \text{mit einem } r(x) , \text{ f\"ur das } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0 . \end{cases}$$

In Worten:

Die lineare Funktion $t(x) := f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0)$ approximiert $f(x)$ in der Nähe von x_0 besonders gut, und zwar so, daß für $x \rightarrow x_0$ nicht nur der Rest $r(x)$ sondern sogar $\frac{r(x)}{x - x_0}$ gegen 0 strebt.

Bezeichnung 2

Die lineare Funktion $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0)$ heißt Gleichung der **Tangente** an f bei x_0 . Ihr Schaubild ist die Tangente an das Schaubild von f im Punkte $(x_0, f(x_0))$.

Eine weitere **Schreibweise für die Approximation**:

Man schreibt $\Delta f := f(x) - f(x_0)$, $\Delta x := x - x_0$ und

$$\Delta f \approx f'(x_0) \cdot \Delta x ,$$

interpretiert als:

Δf (= der "Zuwachs" von f bei x_0) ist annähernd gleich oder "in erster Näherung gleich" $f'(x_0) \cdot \Delta x$ (= $f'(x_0)$ mal dem Zuwachs von x .)

Noch der wichtige

Satz :

Ist f differenzierbar in x_0 , so ist f stetig in x_0 .

Beweis: Der Rest $r(x)$ ist stetig in x_0 mit $r(x_0) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} r(x)$ und $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)$ ist stetig nach den Rechenregeln für stetige Funktionen.

4.1.3 Einige Ableitungen

Wir geben, um erstes Beispielmaterial zu haben, einige Ableitungen an.

Tatsache

Folgende Funktionen haben folgende Ableitungen in ihrem Definitionsbereich:

Funktion	Ableitung
$f \equiv \alpha$ konstant	$f' \equiv 0$
$x^n, n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1} und allgemeiner
$x^q, q \in \mathbb{R}$	qx^{q-1}
e^x	e^x und allgemeiner
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$ und allgemeiner
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Einige Bemerkungen dazu in der Vorlesung. Auf die eine oder andere Herleitung werden wir später noch treffen.

4.1.4 Wachstumsrate und Elastizität

Eine der häufigsten Weisen, wie die Ableitungen in die Wirtschaftstheorien eingehen, ist über die Begriffe “Wachstumsrate” und “Elastizität”.

Definition:

Sei $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ eine differenzierbare Funktion. Man definiert

$$\text{Wachstumsrate von } f \text{ in } x := r_f(x) := \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\text{Elastizität von } f \text{ in } x := e_f(x) := \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

und die zugehörigen Funktionen

$$r_f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[, x \mapsto r_f(x) \quad \text{und}$$

$$e_f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[, x \mapsto e_f(x) \quad .$$

Beispiele:

Für $f(x) = x^n$ ist $w_f(x) = \frac{n}{x}$ und $e_f(x) = n$.

Für $f(x) = a^x$ ist $w_f(x) = \ln a$ und $e_f(x) = \ln a \cdot x$

Interpretation

Wachstumsrate:

$$r_f(x_0) \cdot \Delta x = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \Delta x \approx \frac{\Delta f}{f(x_0)}$$

Interpretiert als: Die Wachstumsrate in x_0 beschreibt näherungsweise den relativen Zuwachs, d.h. den Zuwachs im Verhältnis zum “Output” $f(x_0)$.

Oder: $r_f(x_0)$ gibt näherungsweise das Verhältnis Zuwachs zu Output an, wenn sich der Input um 1 erhöht.

Elastizität

Sei $0 < \lambda < 1$, und $\Delta x = \lambda \cdot x_0$, d.h. der Input x_0 erhöhe sich um den Faktor λ , etwa $\lambda = \frac{1}{100}$. Dann:

$$e_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \Delta x = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta f}{f(x_0)}$$

Also bei $\lambda = \frac{1}{100}$, d.h. bei einer Erhöhung des Inputs um 1% :

$$e_f(x_0) = \frac{\Delta f}{f(x_0)} \cdot 100 \stackrel{!}{=} \text{Erhöhung des Outputs in Prozent.}$$

4.1.5 Ableitungsregeln

Die in diesem Abschnitt auftretenden Regeln sind sehr wichtig und beim Differenzieren allgegenwärtig.

Satz 1 (Ableitungsregeln)

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f, g seien differenzierbare reelle Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ und sei N die Nullstellenmenge von g . Dann gilt:

Auch $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$, letzteres mit Definitionsbereich $X \setminus N$, sind differenzierbar und für die Ableitungen gilt:

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad (\text{Linearkombinationsregel})$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (\text{Produktregel})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

Satz 2 (Kettenregel)

Es seien $f : X_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : X_g \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen und es sei $\text{Bild}(g) \subseteq X_f$

Es sei g differenzierbar in $x_0 \in X_g$ und f differenzierbar in $g(x_0) \in X_f$. Dann gilt:

Die Komposition $f \circ g$ ist differenzierbar in x_0 und für die Ableitung gilt:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Beispiele:

Einfaches Beispiel für die Kettenregel: $g(x) = \lambda \cdot x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann: $(f \circ g)'(x) = \lambda \cdot f'(\lambda x)$.

Interpretation: Der Übergang $x \mapsto \lambda x$ beschreibt eine ‘Umskalierung’, eine Änderung in den Maßeinheiten. So ist etwa $\lambda = \frac{1}{100}$ beim Übergang von Zentimeter zu Meter oder man hat $\lambda = 1000$ beim Übergang von Tonnen zu Kilogramm.

Das Beispiel besagt: Bei der Ableitung taucht der Skalierungsfaktor auf.

Weitere Beispiele in Vorlesung und Übung.

Satz 3 (Ableitung der Umkehrfunktion):

Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine injektive reelle Funktion mit Bild B und es sei $g : B \rightarrow X$ die Umkehrfunktion. Es sei $x \in X$. Dann:

Ist f differenzierbar in x mit Ableitung $f'(x) \neq 0$, so ist g differenzierbar in $f(x)$ und es ist

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{und dann auch} \quad f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Eine weitere Regel, und zwar über die Ableitung von "Potenzreihen", wird in 4.1.6 behandelt. Zuerst jedoch:

Anwendungen der bisherigen Regeln bei der Berechnung einiger Ableitungen:

Wir setzen hier voraus, daß $\exp'(x) = \exp(x)$ ist.

(Siehe dazu 4.1.5). Daraus leiten wir einige der Ableitungen aus der Liste in 4.1.3 her.

(i) Die Ableitung des Logarithmus:

Seien $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ und es sei $y = \exp(x)$. Nach Satz 3 gilt:

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}.$$

(ii) Die Ableitung der Potenzfunktionen:

Es ist $x^q = \exp(q \cdot \ln x)$. Setzt man $g(x) := q \cdot \ln x$, so ist nach Satz 2 (und (i)):

$$(x^q)' = \exp'(g(x)) \cdot g'(x) = \exp(g(x)) \cdot \frac{q}{x} = q \cdot \frac{x^q}{x} = q \cdot x^{q-1}.$$

(iii) Die Ableitung der Exponentialfunktionen:

Für $f(x) = a^x = \exp(x \cdot \ln a)$ gilt: Setzt man $g(x) := x \cdot \ln a$, so ist

$$f'(x) = \exp(g(x)) \cdot g'(x) = a^x \cdot \ln a.$$

4.1.6 Die logarithmische Ableitung

Sei f eine differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich X und mit $f(x) > 0$ für alle $x \in X$. Für die Ableitung der Komposition $\ln f(x)$ gilt dann:

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Bezeichnung

Für solche f nennt man $\frac{f'(x)}{f(x)}$ die **logarithmische Ableitung** von f .

Benutzung der logarithmischen Ableitung:

Die einfach und die doppelt **logarithmische Darstellung** (des Schaubilds) einer Funktion:

Bei der einfach logarithmischen Darstellung:

Man trägt auf der x -Achse wie bisher das ursprüngliche Argument x ab, auf der Ordinatenachse aber statt y den Wert $\ln y$, d.h. man zeichnet den Graphen von $\ln f(x)$.

Bei der doppelt logarithmischen Darstellung:

Zu $x > 0$ trägt man auf der Abszisse den Wert $\ln x$ und auf der Ordinate den Wert $\ln f(x)$ ab.

Gebrauch und Interpretation:

Man benutzt z.B. die einfach logarithmische Darstellung bei rapide wachsenden Funktionen. Die logarithmischen Darstellungen werden aber auch benutzt, um etwa das Wachstumsverhalten der Funktion besser zu verstehen. Z.B.:

Bemerkung

Die logarithmische Ableitung $(\ln f(x))'$ ist offenbar die Steigung im Punkte x des Schaubilds von f in der einfach logarithmischen Darstellung von f .

Neues Licht auf die Begriffe "Wachstumsrate" und "Elastizität":

- (1) Die Wachstumsrate $r_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ist (!) die logarithmische Ableitung und ist also anschaulich durch die Bemerkung beschrieben.
- (2) Die Elastizität $e_f(x)$ von f in x ist gleich dem Anstieg der Tangente des Schaubilds von f in der doppelt logarithmischen Darstellung beim Abszissenpunkt $\ln x$.

Beweis: Es ist für $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} \text{Sekantensteigung} &= \frac{f(\ln x) - f(\ln x_0)}{\ln x - \ln x_0} = \frac{f(\ln x) - f(\ln x_0)}{\ln x - \ln x_0} \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(\ln x) - f(\ln x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{\ln x - \ln x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln' x_0} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = e_f(x). \end{aligned}$$

4.1.7 Ableitung von Potenzreihen

Wir kennen mehrere Reihen, deren Glieder Vielfache der Potenzen x^n der Variablen x sind:

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, den Cosinus, den Sinus. Generell:

Bezeichnung 1 (Potenzreihen):

Gegeben eine Folge $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ reeller Zahlen. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

eine Potenzreihe in x , genauer die Potenzreihe mit den Koeffizienten $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$.

Satz 1 (über die Konvergenz bei Potenzreihen):

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $R \in [0, \infty \cup \{\infty\}] =: [0, \infty]$ (s. Vorlesung), so daß gilt:

- Ist $R = 0$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent nur für $x = 0$.
- Ist $R = \infty$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Ist $0 < R \in \mathbb{R}$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für alle x mit $|x| < R$, und nicht konvergent für alle x mit $|x| > R$. (Für $x = \pm R$ hat dabei jede Potenzreihe ihr eigenes Verhalten.)

Bezeichnung 2 (Konvergenzradius):

Das R aus dem Satz heißt der **Konvergenzradius** der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Beispiele:

Die Exponentialreihe, der Cosinus und der Sinus haben den Konvergenzradius ∞ , die geometrische Reihe hat den Konvergenzradius 1.

Bemerkung

Ist $0 < R \leq \infty$, so wird durch die Reihe eine Funktion

$$f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

definiert. (Vergl. $\exp, \sin, \cos$.)

Wir wollen hier nicht darauf eingehen, wie sich der Konvergenzradius R aus der Folge (a_n) der Koeffizienten bestimmen läßt.

Satz 2 (über die Ableitung von Potenzreihen):

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit dem Konvergenzradius $0 < R \leq \infty$. Dann gilt: Die Funktion

$f := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $]-R, R[$ und man erhält ihre Ableitung „gliedweise“, d.h. es ist

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Der Konvergenzradius der Reihe $f'(x)$ ist dasselbe R wie der für $f(x)$.

Demonstration an den Beispielen $\exp, \sin, \cos$ siehe Vorlesung.

4.1.8 Höhere Ableitungen

Definition:

Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $x_0 \in X$. Ist die Ableitung f' von f differenzierbar in x_0 , so heißt

$$(f')'(x_0) =: f''(x_0) =: f^{(2)}(x_0)$$

die **zweite Ableitung** von f in x_0 und f heißt zweimal differenzierbar in x_0 .

Ist f zweimal differenzierbar in allen $x_0 \in X$, so heißt f **zweimal differenzierbar** und die Funktion $f'' : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f''(x_0)$ heißt die **zweite Ableitung** von f .

Schließlich definiert man für $n \geq 2$ die **n-ten Ableitungen** $f^{(n)}(x_0)$ und $f^{(n)} : X \rightarrow \mathbb{R}$ induktiv als die entsprechenden Ableitungen der $(n-1)$ -ten Ableitung $f^{(n-1)}$ falls letztere existiert. Man nennt dann f **n-mal differenzierbar**.

Noch: f heißt **n-mal stetig differenzierbar**, $n \in \mathbb{N}$, wenn f n -mal differenzierbar ist und wenn die n -te Ableitung noch stetig ist.

Beispiele:

$$(1) \quad \cos''(x) = -\cos(x) \text{ und } \sin''(x) = -\sin(x).$$

$$(2) \quad \exp^{(n)} = \exp \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$$(3) \quad (x^n)^{(n)} \equiv n! \text{ (konstant gleich } n!).$$

4.1.9 Die Regel von de l'Hôpital

Das ist eine sehr effektive Regel, die den tatsächlichen Grenzwert bestimmt, wenn beim Rechnen mit Funktionen oder Grenzwerten unbestimmte Ausdrücke auftreten. Die Regel ist auch sehr flexibel und kann an die meisten unbestimmten Ausdrücke angepaßt werden

Satz

Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen. Es sei x_0 ein Häufungspunkt von X und f und g seien differenzierbar für alle $x \neq x_0$.

Es sei vorausgesetzt, daß $g'(x) \neq 0$ für alle $x_0 \neq x \in X$ und daß

$$\text{entweder} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty = \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

D.h.: Existiert der linke Limes, so auch der rechte und beide sind gleich.

Der Satz gilt auch für uneigentliche Limes, etwa für $\alpha = \infty$.

Außerdem gibt es die entsprechenden einseitigen Varianten.

Schließlich:

Man kann die Regel iterieren: Führt die Betrachtung der ersten Ableitung noch nicht zum Ziel, so betrachte man die zweite Ableitung, die dritte Ableitung usw. Sind bei jedem Schritt die Voraus-

setzungen der Regel erfüllt, und existiert schließlich für $n \geq 2$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \alpha$, so ist

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \dots$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Beweis im einfachsten Fall $g(x) \neq 0$, $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ und $f'(x_0), g'(x_0) \in \mathbb{R}$. Dann ist für $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beispiele

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Weitere Beispiele in der Vorlesung und den Übungen.

4.2 Kurvendiskussion

Das ist die Anwendung der Differentialrechnung auf das Studium des Schaubilds einer Funktion.

4.2.1 Mittelwertsatz und Satz von Rolle

Satz 1 (Mittelwertsatz):

Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann gilt:

Ist f stetig und differenzierbar in $]a, b[$, so gibt es ein $x_0 \in]a, b[$, mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{d.h. mit} \quad f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a).$$

Interpretation der ersten Gleichung: Es gibt einen Punkt x_0 im Innern des Intervalles, so daß die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gleich ist dem Anstieg der Tangente bei x_0 (s. Vorlesung).

Eine Anwendung

Sei X ein Intervall und sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in X$, so ist f konstant.

Beweis in der Vorlesung.

Ein Spezialfall von Satz 1 ist der

Satz 2 (Satz von Rolle)

Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall X .

Sind $a, b \in X$, $a < b$ mit $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis aus dem Mittelwertsatz: Nach Satz 1 gibt es x_0 mit $0 = f(a) - f(b) =$

$$f'(x_0)(b - a), \text{ also mit } f'(x_0) = \frac{0}{b - a} = 0.$$

4.2.2 Monotonie und erste Ableitung

Satz:

Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf $[a, b]$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt:

- $$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \text{ für alle } x \in]a, b[\implies f \text{ ist monoton wachsend in } [a, b] \\ f'(x) &> 0 \text{ für alle } x \in]a, b[\implies f \text{ ist streng monoton wachsend in } [a, b] \\ f'(x) &\leq 0 \text{ für alle } x \in]a, b[\implies f \text{ ist monoton fallend in } [a, b] \\ f'(x) &< 0 \text{ für alle } x \in]a, b[\implies f \text{ ist streng monoton fallend in } [a, b] \end{aligned}$$

Zur Monotonie siehe auch Bez.2 in 3.2.3 . Zum Beweis siehe 4.2.5 .

Anmerkung:

Im allgemeinen wird eine Funktion nicht auf ihrem ganzen Definitionsbereich X monoton sein. Man interessiert sich dann für “Monotonie-Intervalle” von X , das sind Intervalle $[a, b] \subseteq X$, so daß die Einschränkung von f auf $[a, b]$ monoton ist.

4.2.3 Extremwerte

Bezeichnung (Inneres eines Intervalls)

Sei $X \in \mathbb{R}$ ein Intervall. Das Innere $\overset{\circ}{X}$ von X ist das X ohne seine Randpunkte, d.h. das offene Intervall mit denselben Rändern wie X .

Im einzelnen (s. 1.3.3):

Das Innere von $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ und $]a, b[$ ist jeweils $]a, b[$, das Innere von $[a, \infty[$ und von $]a, \infty[$ ist $]a, \infty[$, das Innere von $] - \infty, b]$ und von $] - \infty, b[$ ist $] - \infty, b[$, und das Innere von $X = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$ selbst.

Definition (Extremstellen):

Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und sei $x \in X$. Dann hat f in x

- (i) ein **globales Maximum** von f : $\iff$ Für alle $y \in X$ ist $f(x) \geq f(y)$
- (ii) ein **globales Minimum** von f : $\iff$ Für alle $y \in X$ ist $f(x) \leq f(y)$
- (iii) ein **lokales Maximum** von f : $\iff$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt } \varepsilon > 0, \text{ so daß } f(x) \geq f(y) \\ \text{für alle } y \in X \text{ mit } |y - x| < \varepsilon. \end{array} \right.$
- (iv) ein **lokales Minimum** von f : $\iff$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt } \varepsilon > 0, \text{ so daß } f(x) \leq f(y) \\ \text{für alle } y \in X \text{ mit } |y - x| < \varepsilon. \end{array} \right.$

Extremum bzw. **Extremstelle** ist ein gemeinsamer Name für Maximum oder Minimum.

Statt “global” sagt man auch “absolut” und statt “lokal” sagt man dann “relativ”.

Gilt auf der rechten Seite von (iii) oder (iv) die Gleichheit $f(x) = f(y)$ nur für $x = y$, so spricht man von einem **isolierten** lokalen Maximum oder Minimum.

Satz

Sei X ein Intervall und sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Für Punkte $x_0 \in \overset{\circ}{X}$, dem Innern von X , gilt:

- (1) f hat ein relatives Extremum in $x_0 \implies f'(x_0) = 0$; .
- (2) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \implies f$ hat in x_0 ein isoliertes Minimum (insbesondere also ein Minimum) .
 $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \implies f$ hat in x_0 ein isoliertes Maximum (insbesondere also ein Maximum) .

Zum Beweis siehe 4.2.5 .

Warnung!

Erstens: Die Nullstellen von f' liefern erst einmal nur Kandidaten für Extremstellen. Ob wirklich Extrema (und nicht z.B. Wendepunkte, siehe 4.2.5) vorliegen, muß zusätzlich untersucht werden

Zweitens: Extrema der Funktion können auch in den Randpunkten des Intervalls auftreten, ohne daß dort die Ableitung Null wird. Bei Intervallen mit Rändern muß man also immer auch die Werte der Funktion bei den Randpunkten mit den Werten anderswo vergleichen.

4.2.4 Konvexität und zweite Ableitung

Definition (konvexe Funktionen)

Es sei X ein Intervall und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

f heißt **konvex** (in X) : $\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Für alle } a, b \in X, a < b, \text{ und alle } 0 \leq s \leq 1 \text{ gilt} \\ f(a + s(b - a)) \leq f(a) + s(f(b) - f(a)) \end{array} \right.$

f heißt **konkav** : $\iff -f$ ist konvex : $\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Für alle } a, b \in X, a < b, \\ \text{und alle } 0 \leq s \leq 1 \text{ gilt} \\ f(a + s(b - a)) \geq f(a) + s(f(b) - f(a)) \end{array} \right.$

Anschauliche Bedeutung

Die Bedingung rechts bei der Konvexität bedeutet: Zwischen a und b verläuft das Schaubild der Kurve unterhalb der Sekante, welche die Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verbindet.

Stichworte: linksdrehend oder linksgekrümmt bzw. rechtadrehend oder rechtsgekrümmt (vergl. Vorlesung).

Hinweis:

Bei uns ist "Konvexität" so etwas wie Konvexität "von unten gesehen". In der Literatur gibt es auch die umgekehrte Definition: Die konvexen Funktionen dort sind unsere konkaven Funktionen (Namen sind Schall und Rauch!). Man muß sich also von Autor zu Autor vergewissern, was mit Konvexität gemeint ist.

Satz (Konvexität und zweite Ableitung):

Es sei X ein Intervall und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare reelle Funktion. Dann gilt:

$$f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \overset{\circ}{X} \text{ (dem Innern von } X \text{) } : \iff f \text{ ist konvex.}$$

Zum Beweis siehe 4.2.5 .

Anmerkung

Eine Funktion wird (ähnlich wie bei der Monotonie) im allgemeinen nicht auf ihrem ganzen Definitionsbereich X konvex oder konkav sein. Man bestimmt dann “Konvexitäts- und “Konkavitäts-Intervalle” in X .

Beispiele:

- (1) Die Parabeln $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ sind konvex, wenn $\alpha > 0$ und konkav, wenn $\alpha < 0$.
- (2) Die kubische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$, ist konkav in $]-\infty, 0]$ und konvex in $[0, \infty[$.

4.2.5 Wendepunkte und Nullstellen der zweiten Ableitung

Bezeichnung: (Wendepunkte)

Sei X ein Intervall und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $x_0 \in \overset{\circ}{X}$ im Innern von X .

x_0 heißt ein **Wendepunkt** von f : $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Es gibt } \varepsilon > 0 \text{ so daß }]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq X \\ \text{und so daß } f \text{ konkav ist in }]x_0 - \varepsilon, x_0] \text{ und konvex} \\ \text{in } [x_0, x_0 + \varepsilon[\text{ oder umgekehrt.} \end{cases}$

Ist f zweimal differenzierbar so bedeutet die rechte Seite gemäß dem Satz in 4.2.4, daß f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt, von “-” in $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ zu “+” in $[x_0, x_0 + \varepsilon[$ oder umgekehrt. Anschaulich gesprochen: In x_0 wechselt die (Schaubild-)Kurve ihren “Drehsinn”.

Satz

Sei X ein Intervall, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion und es sei $x_0 \in \overset{\circ}{X}$ ein innerer Punkt von X .

- (1) Sei f zweimal differenzierbar. Dann:
 x_0 ist ein Wendepunkt $\implies f''(x_0) = 0$.
- (2) Sei f dreimal differenzierbar. Dann:
 $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \implies f$ hat einen Wendepunkt in x_0 .

Beispiel:

Die Funktionen $x \mapsto \alpha x^3, \alpha \neq 0$, haben einen Wendepunkt in 0.

4.2.6 Beweiskette

Die Beweise der Sätze in 4.2.1 - 4.2.5 hängen zusammen. Wir geben eine kurze Skizze der Argumentationskette. Dabei ist X ein Intervall, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine (je nach Satz) genügend oft differenzierbare Funktion und x_0 ist ein Punkt im Innern $\overset{\circ}{X}$ von X .

- [1] Man bemerkt folgendes: Ist $f'(x_0) > 0$ (bzw. < 0), so steigt (bzw. fällt) f lokal bei x_0 , d.h. für alle $x \in X$, die genügend nahe bei x_0 sind, ist $f(x) < f(x_0)$ wenn $x < x_0$ und $f(x) > f(x_0)$ wenn $x > x_0$ (bzw. umgekehrt). Das zeigt man so:

Die Funktion $x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$ ist stetig in x_0 .

Ist sie positiv in x_0 , d.h. ist $f'(x_0) > 0$, so ist sie nach der Bemerkung in 3.3.8 positiv in einer ganzen Umgebung von x_0 . Für die $x \neq x_0$ aus dieser Umgebung ist dann $f(x) - f(x_0)$ das gleiche Vorzeichen wie $x - x_0$. Das heißt aber $f(x) > f(x_0)$ wenn $x > x_0$ und $f(x) < f(x_0)$ wenn $x < x_0$, wie behauptet. Entsprechendes gilt, wenn $f'(x_0) < 0$.

[2] Beweis von (1) des Satzes in 4.2.3: Sei x_0 Extremstelle von f . Wäre $f'(x_0) \neq 0$, so würde f gemäß [1] lokal steigen oder fallen, ein Widerspruch.

[3] Nun beweist man den Satz von Rolle:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $f \not\equiv 0$ ist. Dann hat f ein Extremum x_0 mit einem Extremwert ungleich 0. Das x_0 liegt dann im Innern $]a, b[$ von $[a, b]$, weil ja $f(a) = f(b) = 0$. Nach (1) des Satzes in 4.2.3 ist $f'(x_0) = 0$.

Der Mittelwertsatz ist eine leichte technische Verallgemeinerung des Satzes von Rolle.

[4] Die Aussagen des Satzes in 4.2.2 folgen leicht mit Hilfe des Mittelwertsatzes. Etwa so: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$. Dann gibt es $c \in]x_1, x_2[$ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \begin{cases} \geq 0 \text{ (bzw. } > 0) & \text{falls } f'(c) \geq 0 \text{ (bzw.; } f'(c) > 0) \\ \leq 0 \text{ (bzw. } < 0) & \text{falls } f'(c) \leq 0 \text{ (bzw.; } f'(c) < 0) \end{cases} .$$

Weil dies bei den Voraussetzungen des Satzes für alle $x_1 < x_2$ gilt, folgt der Satz.

[5] Die Beweise zu 4.2.4 und 4.2.5 sind etwas komplexer und seien ausgelassen.

4.2.7 Ausgeführte Beispiele

In der Vorlesung werden einige Beispiele zur Extremwertbestimmung und einige Kurvendiskussionen im Detail behandelt.

4.3 Zusammenstellung der elementaren Funktionen

[1] **Polynome und rationale Funktionen:** Schon behandelt

[2] **Die e -Funktion**

gebräuchliche Bezeichnungen: $e(x)$, $\exp(x)$, e^x

$$(*) \quad \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Quotientenkriterium: konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$

Alternative Definition: $e(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

Eigenschaften (mehr oder weniger schwer zu beweisen):

- (0) $e(0) = 1$
- (1) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $e(x) \cdot e(y) = e(x + y)$ (Potenzregel)
- (2) $e(-x) = \frac{1}{e(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (Aus (1) für $y = -x$)
- (3) $e(x) > 0$ für alle x
(klar für $x \geq 0$, dann aus (2))
 $\lim_{x \rightarrow \infty} e(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e(x) = 0$
Insbesondere: $e(\mathbb{R}) = (0, \infty)$
- (4) e ist streng monoton wachsend in ganz $\mathbb{R}$.
(Für $0 \leq x_1 < x_2$ aus der Definition, dann mit (2))
- (5) $(e(x))^y = e(x \cdot y)$
Also: $e(y) = (e(1))^y =: e^y$ mit $e := e(1)$.
 e ist die Eulersche Zahl: $e = 2,7182818284 \dots$
Wir schreiben also in Zukunft auch: e^x für $e(x)$ (bzw. $\exp(x)$)
(Regel (5) gilt für $y \in \mathbb{Q}$ wegen (1) und (2))
- (6) e ist stetig
(als "Potenzreihe", oder weil differenzierbar)

Ableitung:

"Potenzreihen" wie (*) darf man "gliedweise" differenzieren:

$$\begin{aligned} e'(x) &= (1)' + (x)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' + \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \dots + \left(\frac{x^n}{n!}\right)' + \dots \\ &= 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad \text{Also:} \end{aligned}$$

$$(7) \quad e'(x) = e(x)$$

Grenzverhalten:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} &\stackrel{\text{de l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n \cdot x^{n-1}} = \dots \stackrel{\text{de l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty \\ \text{Also:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} &= \infty \end{aligned}$$

In Worten: e^x wächst stärker als jede Potenz von x für $x \rightarrow \infty$.

Ähnlich:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Typische Differentialgleichung:

D (nicht triviales) Intervall, $\alpha \in \mathbb{R}$. Gesucht: differenzierbares $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(*) \quad f' = \alpha \cdot f$$

Tats. 1: (1) $f(x) = K e^{\alpha x}$ mit $K \in \mathbb{R}$ erfüllt (*).

(2) Jedes f , das (*) erfüllt, ist von der Form

$$f(x) = K \cdot e^{\alpha x} \text{ für ein } K \in \mathbb{R}.$$

Bew.: (1) Ableiten.

(2) $f(x)$ erfülle (*). Betrachte $g(x) := \frac{f(x)}{e^{\alpha x}}$. Dann

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x) \cdot e^{\alpha x} - f(x) \cdot \alpha \cdot e^{\alpha x}}{(e^{\alpha x})^2} = \frac{\overbrace{f'(x) - \alpha f(x)}^{=0}}{e^{\alpha x}} \stackrel{(*)}{=} 0 \\ \implies g &\equiv K \text{ konstant und } f(x) = K \cdot e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Anwendung: “exponentielle Wachstumsprozesse”

Alle Prozesse $x \mapsto f(x) \neq 0$, wo momentane Wachstumsrate $= \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha = \text{feste Konstante}$.

Beispiel: Radioaktiver Verfall ($\alpha < 0$: Zerfallsprozesse)

$$\left. \begin{array}{ll} N_0 &= \text{Teilchenzahl bei } t = 0 \\ N(t) &= \text{Teilchenzahl bei } t \geq 0 \end{array} \right\} N(t) = N_0 \cdot e^{-c \cdot t}, \text{ mit } c > 0.$$

Halbwertszeit: $t^* =$ das t , wo $N(t^*) = \frac{1}{2} N_0$. Also: $\frac{1}{2} N_0 = N_0 \cdot e^{-c \cdot t^*}$.

$$\text{Logarithmieren ergibt: } -\ln 2 = -c \cdot t^* \implies \boxed{t^* = \frac{\ln 2}{c}}$$

3 Der natürliche Logarithmus

Bem.: e als Abbildung $e: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv.

Def.: $\ln: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion.

Schaubilder: Für e in 3.1.8, für $\ln$ in 3.2.3.

Allgemeine Eigenschaften:

Streng monoton steigend, $\ln(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$.

Weitere Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{ll} \ln(x \cdot y) &= \ln x + \ln y \\ \ln \frac{1}{x} &= -\ln x \\ a \cdot \ln x &= \ln x^a, a \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ aus } \left\{ \begin{array}{l} \boxed{2} \text{ (1)} \\ \boxed{2} \text{ (2)} \\ \boxed{2} \text{ (5)} \end{array} \right.$$

Ableitung: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Grenzverhalten:

$$n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = 0 \quad \left(\text{de l'H.} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}} = n \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \right)$$

D.h: Der $\ln$ wächst schwächer als jede positive Potenz von x .

Ebenso:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{1}{n}} \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{n}}} \stackrel{\text{de l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (-n \cdot x^{\frac{1}{n}}) = 0$$

($\ln x$ geht “sehr langsam” gegen $-\infty$ für $x \rightarrow 0$)

4 Allgemeine Potenzen**Definition:**

$$a^b := e^{b \cdot \ln a}$$

Eigenschaften (Potenzregeln):

$$\begin{aligned} a^{b+c} &= a^b \cdot a^c & \text{und} & & (a_1 \cdot a_2)^b &= a_1^b \cdot a_2^b \\ (a^b)^c &= a^{b \cdot c} \end{aligned}$$

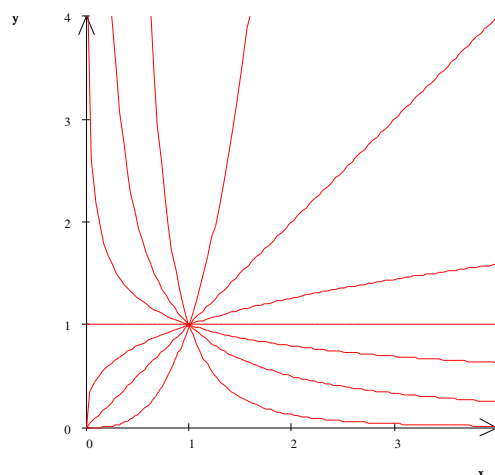
Die Definition liefert **zwei Typen von Funktionen**:

1. Typ: $a = x$ variabel, b fest

$$P_b : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^b \quad \text{Potenzfunktion}$$

Schaubilder:

Mit – der Reihe nach oben von links nach rechts, dann um die Ecke nach unten –
 $b = -\frac{1}{3}, -1, -3, 1, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -1, -3$



Ableitung: $(x^b)' = b \cdot x^{b-1}$

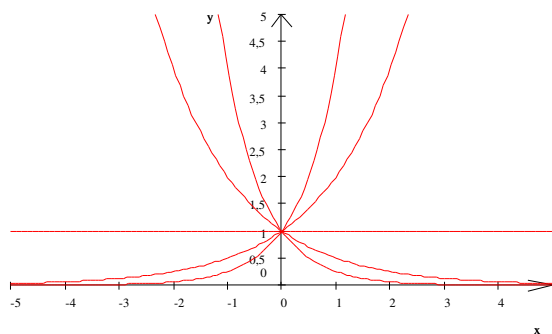
2. Typ: $0 < a$ fest, $b = x$ variabel

$$e_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto a^x$$

Offenbar: $a^x = e^{x \cdot \ln a} = e^{\alpha x}$ mit $\alpha = \ln a$

Also: Die e_a sind keine “neuen” Funktionen. Sie sind identisch mit den Funktionen $x \longmapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Schaubilder: Steigend die mit $1 < a$, fallend die mit $0 < a < 1$.



Ableitung: $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

5 Logarithmus zur Basis $a > 1$.

Def.: $a > 1$: $\ln_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $x \longmapsto a^x$.

Name: **Logarithmus zur Basis a** . (Andere Schreibweise: $\log_a$)

Oft benutzt: Der dekadische Logarithmus, wo $a = 10$: $\log_{10} x =: \lg x$

Umrechnung von einer Basis in die andere:

$$e^{\ln x} = x = a^{\ln_a x} \underset{\text{Def. der Pot.}}{=} e^{(\ln_a x) \cdot (\ln a)} \underset{\text{e injektiv}}{\implies} \boxed{\ln_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x}.$$

6 Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen)

Definition: Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (der Sinus) und $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (der Kosinus) sind definiert durch:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Schaubilder: In 3.3.9.

Alternative Definition

Auf dem “Einheitskreis”:=

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Für $\alpha > 0$:

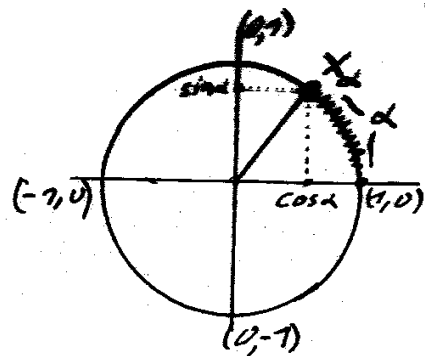
x_α := derjenige Punkt auf dem Kreis, zu dem man gelangt, wenn man von $(1, 0)$ ausgehend in positiver Richtung (d.i. gegen den Uhrzeigersinn) auf der Kreislinie den Weg (die “Bogenlänge”) α zurückgelegt hat.

Für $\alpha < 0$:

Ähnlich, aber die Bogenlänge $|\alpha|$ ist in negativer Richtung abzutragen.

Dann:

$$x_\alpha =: (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

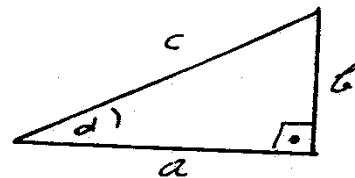


Daraus die “Schuldefinition” ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$):

$$\sin \alpha = \frac{b}{c} = \frac{|\text{Gegenkathete}|}{|\text{Hypotenuse}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c} = \frac{|\text{Ankathete}|}{|\text{Hypotenuse}|}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \quad (\text{s.u.})$$



Ableitungen: (gliedweise ableiten!)

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Definition von π :

$$\frac{\pi}{2} := \text{1. Nullstelle des Kosinus rechts von 0}$$

oder

$$2\pi := \text{Bogenlänge des Einheitskreises}$$

Haupteigenschaften:

(1) $\sin 0 = 0,$	$\cos 0 = 1$
$\sin(-x) = -\sin x,$	$\cos(-x) = \cos x, \text{ alle } x$
$\uparrow$	$\nwarrow$
$\sin$ ist “ ungerade ” Funktion	$\cos$ ist “ gerade ”

(2) “**Kreiseigenschaft**”: $\cos^2 + \sin^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(3) Additionstheoreme:

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

und daraus

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad (\text{mit (2)})$$

(4) Periodizität:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(5) Phasenverschiebung:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

(6) Nullstellen

$$\sin x = 0 \iff x = k \cdot \pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(6) ExtremstellenFür $\sin$: in den Nullstellen des Kosinusfür $\cos$: in den Nullstellen des Sinus**(7) Spezielle Werte:** $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **Anwendungen:**

Z.B. Snellius'sches Brechungsgesetz:

$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$

Differentialgleichungen: $\omega > 0$

$$(DGL) \quad y''(x) + \omega^2 \cdot y(x) = 0 \quad \text{“Schwingungsgleichung”}$$

Satz:(1) Die Funktionen $f(x) = a \cdot \cos \omega x + b \cdot \sin \omega x$, a, b Konstante aus $\mathbb{R}$, genügen der (DGL).

(2) Jede auf einem Intervall definierte Funktion, welche die Schwingungsgleichung erfüllt, ist von der in (1) beschriebenen Form.

Bew.: (1) Ableiten ($\cos'' x = -\cos x$, $\sin'' x = -\sin x$)

(2) Sei f eine Lösung. Setze

$$g(x) := f(x) \cdot \sin \omega x + \frac{1}{\omega} f'(x) \cdot \cos \omega x$$

$$h(x) := f(x) \cdot \cos \omega x - \frac{1}{\omega} f'(x) \cdot \sin \omega x$$

Dann:

$$f(x) = h(x) \cdot \cos \omega x + g(x) \cdot \sin \omega x \quad (**)$$

Für alle x ist:

$$g'(x) = \frac{1}{\omega} (f''(x) + \omega^2 \cdot f(x)) \cdot \cos \omega x \stackrel{\text{DGL}}{=} 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{\omega} (f''(x) + \omega^2 \cdot f(x)) \cdot \sin \omega x = 0$$

Also:

$$g(x) = a = \text{konstant}, \quad h(x) = b = \text{konstant}$$

und:

$$f(x) = a \cdot \cos \omega x + b \cdot \sin \omega x \quad (\text{nach } (**))$$

7 Tangens und Kotangens

$$N_c := \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \text{Nullstellenmenge des Kosinus}$$

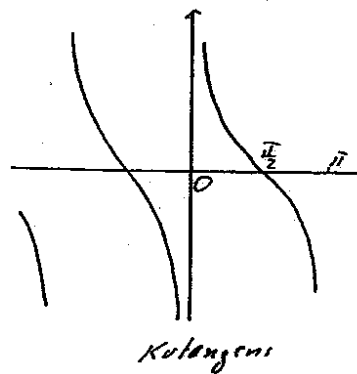
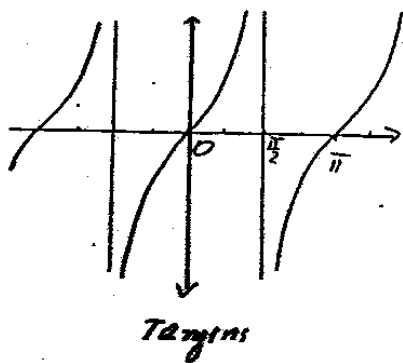
$$N_s := \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \text{Nullstellenmenge des Sinus}$$

Definition:

$$\tan : \mathbb{R} \setminus N_c \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x} =: \tan x$$

$$\cot : \mathbb{R} \setminus N_s \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\cos x}{\sin x} =: \cot x$$

Schaubilder:



Ableitungen: (Quotientenregel! und (3))

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

8 Die zyklometrischen Funktionen

Der Sinus und der Kosinus definieren bijektive Abbildungen:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

Die Umkehrfunktionen sind

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{der Arkussinus})$$

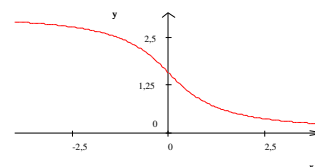
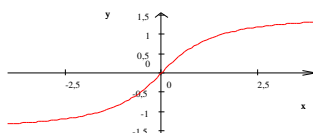
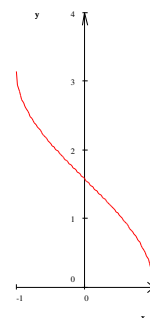
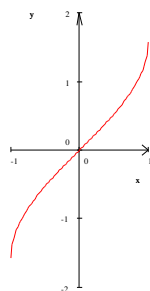
$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \quad (\text{der Arkuskosinus})$$

Ähnlich erhält man

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{der Arkustangens})$$

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi) \quad (\text{der Arkuscotangens})$$

Schaubilder: In der Reihenfolge $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, arccot



Ableitungen: $\arcsin$ und $\arccos$ sind im **offenen** Intervall $(-1, 1)$ differenzierbar, $\arctan$ und arccot überall. Es gilt:

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

9 Hyperbolische Funktionen:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Sinus hyperbolicus

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Kosinus hyperbolicus

$$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Tangens hyperbolicus

$$\coth x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

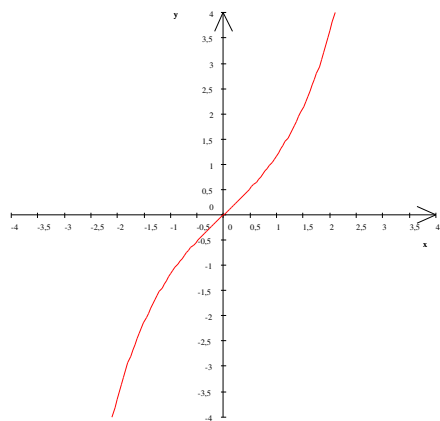
Kotangens hyperbolicus

Anwendungen:

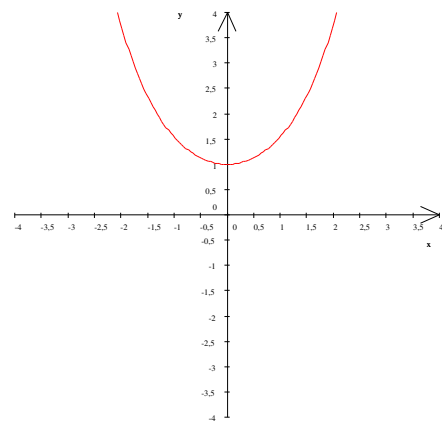
Der Kosinus hyperbolicus als Kettenlinie.

“Hyperbel-Eigenschaft”: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

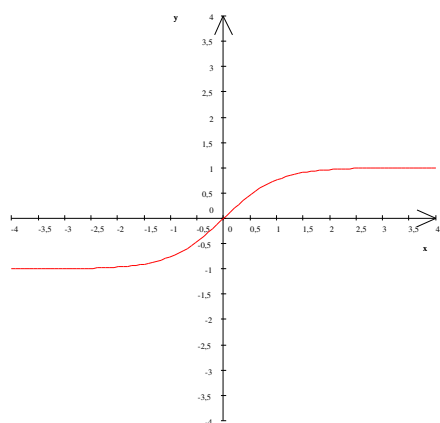
Schaubilder der hyperbolischen Funktionen:



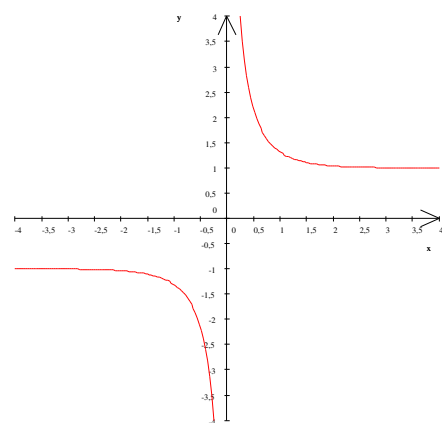
$\sinh$



$\cosh$ (Kettenlinie)



$\tanh$



$\coth$

4.4 Aufgaben

Aufgabe 1. Bestimmen Sie Ableitungen für folgende Funktionen

- | | | |
|----------------------------------|---|--|
| a) $f(x) = \frac{1}{x}$ | d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} + \cos(x)$ | g) $f(x) = \frac{(x^3+x) \cdot \sin(x)}{\ln(x)}$ |
| b) $f(x) = e^x \cdot x^2$ | e) $f(x) = a^3 \cdot x^2$ | h) $f(t) = t \cdot x^2 + \sin(x)$ |
| c) $f(x) = x^3 \cdot (\ln(x))^2$ | f) $f(x) = 4^x$ | i) $f(x) = x^{-b} + e^{ax} \cdot x^a$ |

Aufgabe 2.

a) Bestimmen Sie die Elastizitäten $e_f(x) := \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$ für folgende Funktionen.

- | | | |
|----------------------------------|--------------------|--------------------------|
| a) $f(x) = e^{\frac{1}{4}x^2-1}$ | b) $f(x) = x + 10$ | c) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ |
|----------------------------------|--------------------|--------------------------|

d) Sei $f(x) > 0$ für alle $x \in D(f)$ des Definitionsbereichs. Allgemein gilt (wieso?):

$$e_f(x) = \frac{(\ln(f(x)))'}{(\ln(x))'}.$$

Interpretation: Zeichnet man f in ein Koordinatensystem mit logarithmischen Skalen (für Abszisse und Ordinate), so stellt $e_f(x)$ die Steigung an der Stelle x dar.

Aufgabe 3. Diskutieren Sie (Definitionsmenge, Nullstellen, Polstellen, Grenzwerte und Verlauf des Graphen):

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+5)^2}{(x-2)^3(2x+5)}$$

Aufgabe 4. Wieso ist folgende Anwendung von der Regel von l'Hôpital falsch?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} \stackrel{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x - 4} \stackrel{\text{l'Hopital}}{=} \frac{2}{2} = 1$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

- | | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-3)}{x^2 - 4x + 4}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$ | d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - \cos(\frac{1}{x}))$ |
|---|---|---|---|

Aufgabe 6. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 4 \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x^2 - 4x$$

mit Definitionsbereich $D(f) = [1, 6]$. Bestimmen Sie das Bild von f .

Aufgabe 7. Für eine Werbekampagne kommen 2 000 000 potentielle Käufer in Frage. Der Durchschnittserlös pro Kauf beträgt 5 EUR, und die Kosten für die Werbekampagne belaufen sich pro Tag auf 10 000 EUR. Die Verkaufszahlen während einer Werbekampagne zeigen folgenden typischen Verlauf:

$$1 - e^{-0,4t},$$

d.h. die Verkaufszahlen betragen absolut $2\,000\,000 \cdot (1 - e^{-0,4t})$. Bestimmen Sie die Anzahl t der Tage, an denen die Werbekampagne durchgeführt werden soll, so dass der Gewinn maximal wird. Wie hoch ist der Gewinn dann?

Aufgabe 8. Diskutieren Sie (Definitionsmenge, Nullstellen, Polstellen, Grenzwerte, Monotoniebereiche und Verlauf des Graphen):

$$f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 1$$

Aufgabe 9. Wie kann man den Zwischenwertsatz aus dem Satz von Rolle herleiten?