2 Folgen. Reihen. Konvergenz

2.1 Grundlagen

2.1.1 Folgen: Definition und erste Beispiele

Definiton:

Eine (reelle Zahlen-)Folge ist eine Zuordnung, bei der jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl – etwa a_n genannt – zugeordnet ist.

Schreibweisen:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{oder} \quad a_n, n = 1, 2, \dots \quad \text{oder} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Variante:
Man beginnt das Zählen bei Null statt bei Eins, d.h. die Folge beginnt mit a_0 statt mit a_1 . Also: Es wird jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine reelle Zahl zugeordnet, geschrieben

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, \quad \text{bzw.} \quad a_n,\ n = 0, 1, 2, \quad \text{bzw.} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

N-Folgen: Sei $N \in \mathbb{N}$.
Eine endliche Folge, genauer eine N-Folge, ist eine Zuordnung, wo jedem $n = 1, 2, \dots, N$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet ist.

Schon vorgekommene Beispiele (mit leicht geänderten Bezeichnungen):

(1) Vgl. die Definition in 1.2.5:
Gegeben $a, d \in \mathbb{R}$. Dann sei:

$$a_n := a + n \cdot d, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Folge $a_0, a_1, a_2, \dots$ heißt eine **arithmetische Folge** mit Differenz d.

(2) Die geometrische Folge (vgl. 1.2.6): Gegeben $K, q,\ \ q \neq 0$.
(In 1.2.6 war $K = D$ ein Geldbetrag, $q = a = 1 + \frac{p}{100}$).
Definiere:

$$a_n := K \cdot q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bezeichnung: Die Folge $a_n := Kq^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ heißt eine **geometrische Folge** mit Quotient q.

Interpretation: K := ein Grundkapital, $q = 1 + \frac{p}{100}$. Dann:
$K \cdot q^n$ = Kapital nach n-fachem jährlichen Zinseszinszuschlag ($p\%$ Zinsen).

In 1.2.6 hatten wir zur Folge $a_n := a^n,\ n = 0, 1, 2, \dots$ auch Summen der Form

$$A_n := 1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \text{ betrachtet.}$$

Allgemein:

Definition 2 $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ sei eine Folge

Betrachte $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
Dann:

$s_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ ist eine (neue) Folge.

s_n heißt die n-te **Partialsumme** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Folge der Partialsummen.

Übliche Bezeichnung:
Für die Folge der Partialsummen hat man einen extra Namen: Sie heißt die **(unendliche) Reihe mit den Gliedern** $a_0, a_1, \ldots$

Schreibweise dafür:

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Achtung: Diese ∞-en Summen sind vorläufig nur formale Schreibweise für die Folge der $s_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$, und nicht etwa Zahlen.

Anmerkung: Man hat auch die Reihe der a_n bei Folgen, die mit a_1 beginnen: Man schreibt dann

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2.1.2 Weitere Beispiele. Das Problem der Konvergenz

(3) Harmonische Folge und Reihe:

Folge: $a_n := \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$

Partialsummen: $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$

Reihenschreibweise: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(4) Alternierende harmonische Reihe:

Folge: $a_n := (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$

Reihe: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$

(5) “Empirische” (endliche) Folgen:
Etwa die Folge der Dax-Indizes an einer vorgegebenen Folge von Zeitpunkten. Solch eine Folge heißt auch eine **Zeitreihe**. Folgen von Aktienkursen genügen auf den ersten Blick keinen mathematischen Gesetzmäßigkeiten und werden nur statistisch untersucht.
Empirische Folgen sind etwa auch die Meßreihen der Naturwissenschaftler.

(6) Die Folge $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n \quad n = 1, 2, \ldots$

Also: $a_1 = 2, \quad a_2 = (\frac{3}{2})^2 = 2,25, \quad a_3 = (\frac{4}{3})^3 = 2,37037, \ldots$

(Die zugehörige Reihe spielt keine Rolle in der Mathematik.)

Interpretation des Folgenglieds $(1 + \frac{1}{n})^n$ in (6) :
Bei einem Zinssatz von 100% (der Einfachheit halber) hat man:

n	Kapital + Zinseszins nach einem Jahr	bei Zinsausschüttung
1	$K \cdot (1+1) = 2K$	jährlich
2	$K \cdot (1+\frac{1}{2}) \cdot (1+\frac{1}{2}) = 2,25K$	halbjährlich
4	$K \cdot (1+\frac{1}{4})^4 \approx 2,44K$	vierteljährlich
12	$K \cdot (1+\frac{1}{12})^{12} \approx 2,613K$	monatlich
$\vdots$		$\vdots$

Also für n immer größer: Immer kürzere Fristen bei der Zinsausschüttung.
Frage: Wie groß kann das Kapital letztlich werden?

Problem generell:

Was wird aus a_n, wenn n immer größer und schließlich "über alle Schranken groß" wird ?

Und: Kann man die erst einmal nur formal definierte unendliche Summe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ in der Schreibweise für Reihen unter Umständen als reelle Zahl auffassen ?

Bevor wir diese Fragen mit Hilfe des Begriffs der Kovergenz beantworten werden, wollen wir noch einen weiteren Beispieltyp betrachten.

2.1.3 Rekursive Definition von Folgen

Es ist möglich, Folgen "rekursiv" zu definieren. Das geht so:

Rekursive Definition von Folgen:

Im einfachsten Fall:
Man gibt a_0 vor (oder a_1 , wenn die Zählung mit 1 beginnt). Anschließend gibt man eine eindeutige Vorschrift an, wie a_{n+1} aus a_n zu berechnen ist für $n = 1, 2, ...$
Dann: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt als definiert.

Etwas allgemeiner:
Man gibt $a_0, a_1, ..., a_{n_0}$ an für ein $n_0 \geq 0$. Danach beschreibt man durch eine eindeutige Vorschrift, wie für $n > n_0$ das a_{n+1} aus den $a_0, a_1, ..., a_n$ zu berechnen ist.
Auch dann: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt damit als wohldefiniert.

Beispiel:

(7) $a_0 = 1$ und $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ für $n \geq 1$. Es ist

$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = 1.5\ ,\ a_2 = 1.41666..\ ,\ a_3 = 1.4142568..\ ,\ ...$$

Anmerkung:
Arithmetische und geometrische Folgen kann man auch auf prägnante Weise rekursiv definieren.(Vergl. Vorlesung)

Wir kommen nun zur Frage: Was haben die Vermehrung der Kaninchen, Kunst und Architektur, und Aktienkurse gemeinsam ?

Dazu geben wir als Beispiel eine der berühmtesten Folgen der Mathematikgeschichte:

(8) Die **Fibonacci-Folge**:

Es sei $f_0 := 1,\ f_1 := 1$ und rekursiv definiert: $f_{n+2} := f_n + f_{n+1},\ n = 2, 3, ...$
Die ersten Folgenglieder sind

$$1,\ \ 1,\ \ 2,\ 3,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 13,\ \ 21,\ \ 34,\ \ 55,\ \ 89,\ ...$$

Anwendungen der Fibonacci-Folge:

- Die Fibonacci-Folge dient als ein Modell für die Vermehrung der Kaninchen, wenn man von folgenden Annahmen ausgeht:

  1. Zu Beginn des ersten Monats existiert ein Paar Kaninchen.
  2. Ein Kaninchen ist erwachsen, wenn es mindestens 2 Monate alt ist
  3. Ein Paar erwachsener Kaninchen erzeugt jeden Monat ein Paar junger Kaninchen.
  4. Kaninchen werde beliebig alt.

  Dann ist f_n die Anzahl der Kaninchenpaare am Ende des $n$ten Monats. (Vergl. Volesung)

- Man kann zeigen: Für $n \longrightarrow \infty$ kommt $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ der Zahl $\alpha = \frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big) = 1.61803...$ beliebig nahe. (Z.B. ist $\frac{f_{11}}{f_{10}} = \frac{89}{55} = 1.6\overline{18}$.)

  Es ist $\frac{1}{\alpha} = 1 - \alpha$ und α ist die Verhältniszahl beim sogenannten **Goldenen Schnitt** . Objekte, bei denen das Verhältnis $1 : \alpha$ oder $\alpha : 1$ eine Rolle spielt, gelten in der klassischen Kunst und Architektur als schön und ausgewogen. Das hat man auch in unseren modernen Zeiten übernommen: Das Verhältnis der Seitenlängen unserer Kreditkarten ist α !

- In einer bestimmten Theorie der Börsenkurse gibt es die sogenannten **Elliot-Wellen**. Man geht von einem wellenförmigen Auf und Ab der Kurse aus und bei den Verhältnissen der Wellenlängen taucht die Goldene-Schnitt-Zahl α bzw. $\frac{1}{\alpha}$ auf.

- Schließlich spielen die Paare f_n, f_{n+2} der Fibonaccizahlen auch bei der Blattanordnung von Pflanzen eine Rolle.

Fazit: Die Fibonacci-Zahlen sind ein Teil der Struktur unserer Welt.

2.2 Konvergenz

Wir untersuchen, was bei unseren Beispielen passiert, wenn der Folgenindex n beliebig groß wird.

Bei (1) Für $d > 0$ etwa wird nd nach dem Archimedischen Axiom größer als jede vorgegebenes $C > 0$ und somit “wächst” auch $a_n = a + nd$ ”über jede Schranke hinaus”.

Bei (2) Für $q = 1$: a_n ist konstant gleich n.
Für $q > 1$: Wieder kann man zeigen, daß q^n über alle Schranken wächst.

Aber wenn $0 < q < 1$:
q^n wird “beliebig klein”und kommt der 0 “beliebig nahe”.

Dann auch: $\dfrac{q^n}{1-q}$ wird beliebig klein und

$$1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

kommt dem Wert $\dfrac{1}{1-q}$ beliebig nahe. (Genauer in Definition 1)

Bei (3) , (4) und (6): Was wird aus den Teilsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ und den Gliedern $(1 + \frac{1}{n})^n, \quad n = 1, 2, \ldots$ für $n \to \infty$?

Der Sachverhalt, der in den Überlegungen zuvor mit “einem Wert beliebig nahe kommen” formuliert wurde, wird nun genau gefaßt.

2.2.1 Definiton der Konvergenz

Definition 1: (Konvergenz)
Es sei $(a_n)_{n=1,2,...}$ eine Folge. $a \in \mathbb{R}$. Man definiert:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ist konvergent** mit a als **Grenzwert** oder **Limes**
bzw.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** a für $n \to \infty$
$:\Longleftrightarrow$

!

$:\Longleftrightarrow$
Zu jedem (wenn auch noch so kleinen) $\varepsilon > 0$
gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ (unter Umständen sehr groß),
so daß für alle $n \geq N$ gilt: $\quad |a_n - a| < \varepsilon$
(d.h. der Abstand zwischen a_n und a ist kleiner als das ε).

Schreibweisen für diese Sachverhalt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Nullfolge** .

> Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent mit Summe** a , wenn die Folge ihrer Teilsummen $s_n = a_0 = a_1 + ... + a_n, n = 0, 1, 2, ...,$ gegen a konvergiert.
> Wenn dies der Fall ist, schreibt man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$.
> In diesem Fall steht die formale unendliche Summe also für eine eindeutig bestimmte reelle Zahl !

Bemerkungen:
Der Grenzwert einer Folge ist, wenn er existiert, eindeutig bestimmt.
Die Tatsache der Konvergenz und der Grenzwert ändern sich bei einer Folge nicht, wenn man für endlich viele Indizes die Folgenglieder abändert.
Bei einer konvergenten Folge ist die Menge aller Folgenglieder (als Teilmenge von $\mathbb{R}$) beschränkt (vergl. 1.3.4).

Variante der Definition:

Bezeichnung: Sei $a \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$.
Das Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ heißt die ε-**Umgebung** von a.
Schreibweise: $U_\varepsilon(a) :=]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.
(Es ist das Intervall mit Mittelpunkt a und der Länge 2ε).

Variante der Konvergenzdefinition:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N}\text{, so daß gilt:} \\ \text{Alle Folgenglieder } a_n \text{ mit } n \geq N \text{ liegen} \\ \text{in der } \varepsilon\text{-Umgebung von } a. \end{array} \right.$$

$$\overset{!}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gilt: \quad Bis auf endlich viele Ausnahmen} \\ \text{liegen alle } a_n \text{ in } U_\varepsilon(a). \end{array} \right.$$

Interpretation:
Man kann a bis auf einen beliebig kleinen Fehler ε durch a_n approximieren, wenn man nur n genügend groß wählt.

Das führt zur verbreitetesten praktischen **Anwendung** der Konvergenz von Folgen:

> Wo reelle Zahlen berechnet werden, z.B. in den Taschenrechnern, werden sie meist als Grenzwert passender Folgen berechnet. Die Berechnung der Folgenglieder geht so weit, bis eine gewünschte Genauigkeit (beispielsweise $\varepsilon = 10^{-10}$) erreicht ist.

2.2.2 Erste Bestimmung von Grenzwerten:

Tatsache:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(2) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

(3) Für q mit $|q| < 1$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \;=\; \dfrac{1}{1-q}\;.$ **!**

(4) Es ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1\;.$

Außerdem:

(5) Für die rekursiv definierte Folge mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$
gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}\;.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n := (1+\dfrac{1}{n})^n \;=\; e = 2.718281828459...\;.$ **!**
Die Zahl e heißt **Eulersche (Wachstums-)Zahl**.

Zum **Beweis:**
Beweisskizzen von (1) - (4) mit elementaren Überlegungen in der Vorlesung.
Zum Beweis von (5) braucht man feinere Methoden.
Bei (6) beweist man die Konvergenz (mit dem Monotonieriterium, s.unten) und definiert die Zahl e als den Grenzwert. Sie kann dann durch einen endlichen Dezimalbruch bis auf einen tolerierten kleinen Fehler beschieben werden. (Bei unserer Angabe ist der Fehler $< \varepsilon = 10^{-12}$.)

Anwendungen und Deutungen:
Zum Ergebnis aus (6) (vgl. Interpretation des Beispiels (6) in 2.1.2):

> Bei "kontinuierlicher" Verzinsung und 100% Zinsen erhöht sich K in einem Jahr auf $K \cdot e = 2,718\ldots \cdot K$.

Zum Ergebnis aus (3):

> Auswirkung von Investitionen auf das Volkseinkommen (siehe Vorlesung).

Anmerkung:
Die Schwierigkeit bei der Untersuchung, wie sich eine Folge bei wachsendem n verhält, beruht häufig auf dem Widerstreit gegensätzlicher Tendenzen, demonstriert am Beispiel $a_n = (1+\frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$ versus $a_{n+1} = (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$:

> Die einzelnen Faktoren $\frac{n+1}{n}$ bei a_n sind (größer 1 und) größer als die Faktoren $\frac{n+2}{n+1}$ bei a_{n+1}.
> Aber: Bei a_{n+1} hat man einen Faktor mehr.
> Was gibt den Ausschlag bei der Frage, ob $a_n < a_{n+1}$ oder $a_n > a_{n+1}$? Ist es der zusätzliche $(n+1)$-te Faktor $\frac{n+2}{n}$, bei a_{n+1}, der den Wert vergrößert, oder die Tatsache, daß die n Faktoren in a_n alle größer sind als die ersten n-Faktoren in a_{n+1}. (Dazu und zum Vergleich mit der Folge der $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ vergleiche die Vorlesung.)

2.2.3 Konvergenz gegen $\pm\infty$ (Uneigentliche Konvergenz)

Bei manchen Folgen, wie etwa $a_n = n$, wachsen die Folgenglieder "über alle Schranken hinaus". Das ist ein definiertes überschaubares Verhalten und wird mit einer Definition honoriert.

Definition (Konvergenz gegen $\pm\infty$):

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge. Man definiert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ (bzw. } -\infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Zu jedem } C > 0 \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N}, \\ \text{so daß für alle } n \geq N \text{ gilt:} \\ a_n > C \text{ (bzw. } a_n < -C) \end{cases}$$

Man sagt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist uneigentlich konvergent.
Ist $(s_n)_{n=0,1,...}$ die Reihe mit der den Gliedern a_n, d.h. die Folge der $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$ so schreibt man bei uneigentlicher Konvergenz von $(s_n)_{n=0,1,...}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$$

und sagt: Die Reihe der a_n konvergiert gegen $\pm\infty$.

Prominentes nicht triviales Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad ! \qquad \text{(Beweis in der Vorlesung)}$$

Information als Kontrast:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \; = \; \ln 2 \; \approx \; 0,693\ldots$$

Interessantes Spielfeld für Mathematiker:
Gegeben eine "Unterreihe" von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Konvergiert sie gegen ein reelles α oder gegen $+\infty$?

2.2.4 Rechnen mit konvergenten Folgen und Reihen

Satz 1:

$(a_n)_{n=0,1,2,...}$ und $(b_n)_{n=0,1,2,...}$ seien konvergente oder uneigentlich konvergente Folgen und es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) \; = \; \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) \; = \; \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \; = \; (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

(4) und, falls alle $b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Dabei werden für reelle Grenzwerte a und die uneigentlichen Grenzwerte $\pm\infty$ folgende formalen “Rechenregeln” mit (Kommutativgesetzen) benutzt:

$$\begin{array}{ccc} a+\infty=\infty & a-\infty=-\infty & \infty\cdot\infty=\infty \\ \infty\cdot(-\infty)=-\infty & (-\infty)\cdot(-\infty)=\infty & \end{array}$$

und für $a \neq 0$:

$$a\cdot\infty = \begin{cases} -\infty & a<0 \\ \infty & a>0 \end{cases} \quad \text{und} \quad a\cdot(-\infty) = \begin{cases} \infty & a<0 \\ -\infty & a>0 \end{cases}$$

Beachte: Es sind <u>keine Aussagen</u> gemacht für $0\cdot(\pm\infty)$, $\infty-\infty$ und $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ Diese Ausdrücke heißen “unbestimmte Ausdrücke” und sie machen ohne weitere Angaben keinen Sinn. Weiteres dazu siehe 2.2.7 .

Für konvergente Reihen gilt teilweise das Entsprechende:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \end{aligned}$$

Aber Vorsicht!

Es ist (im allgemeinen) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot b_n) \overset{!}{\neq} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$, d.h. die analoge Produktregel gilt nicht!

Beweise: (1) – (4): durch geschicktes Abschätzen

Für die Reihen: Sind $s_n := a_1 + \ldots + a_n$ und $t_n := b_1 + \ldots + b_n$ die Teilsummen, so gilt

$$\begin{aligned} \alpha a_0 + \ldots + \alpha a_n &= \alpha \cdot s_n \\ (a_0 + b_0) + \ldots + (a_n + b_n) &= s_n + t_n \end{aligned}$$

Aber im allgemeinen

$$s_n \cdot t_n = (\sum_{k=0}^{n} a_k)(\sum_{k=0}^{n} b_k) \overset{!}{\neq} a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

Beispiel für das Rechnen mit konvergenten Folgen:

(1) Wir betrachten das Beispiel aus (5) der Tatsache in 2.2.2 : Man zeigt, daß $a_n > 0$ für alle n und hat dann

$$(*) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \Longleftrightarrow 2a_n a_{n+1} = a_n^2 + 2$$

Man zeigt nun, daß die Folge der a_n konvergiert (sie ist monoton fallend und nach unten beschränkt, s.). Der Grenzwert sei a . Man macht sich klar, daß die Folge $(b_n := a_{n+1})_{n=1,2,\ldots}$

dann ebenfalls gegen a konvergiert. Iterierte Anwendung der Aussagen im Satz liefert dann aus der rechten Aussage von $(*)$:

$$2a^2 \;=\; a^2+2 \Longleftrightarrow a^2=2\;, \quad \text{d.h. es ist } a=\sqrt{2}\;.$$

2.2.5 Abschätzen bei konvergenten Folgen

Tatsache

$(a_n)_{n=1,2,...}$ und $(b_n)_{n=1,2,...}$ seien konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b. Dann:

Ist $a_n \leq b_n$ für alle n , so ist $a \leq b$.

Achtung $(!)$: Es ist möglich, daß $a_n < b_n$ für alle n , aber $a = b$.

Beispiel für letzteres: $(a_n)_{n=1,2,...}$ sei die konstante Folge $a_n = 0$ für alle n mit Grenzwert 0 , und es sei $b_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$. Dann ist $a_n < b_n$ für alle N , und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2.2.6 Einsetzen von Folgen in Polynome:

Definition (Polynome):

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und seien $\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_m \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_m \neq 0$. Die Zuordnung die aus $x \in \mathbb{R}$ die Zahl

$$\alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 \;=:\; p(x)$$

produziert, heißt ein **Polynom**, genauer: das Polynom mit den Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m$.

Man spricht von einem Polynom m-ten Grades.

Nun sei $(a_n)_{n=1,2,...}$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge. Durch das Polynom wird eine neue Folge

$$c_n \;=\; p(a_n) \;=\; \alpha_m a_n^m + \alpha_{m-1}a_n^{m-1} + ... + \alpha_1 a_n + \alpha_0$$

definiert. (Man sagt, c_n entsteht durch "**Einsetzen**" von a_n in das Polynom.)

Aus den Regeln (1),(2) und (3) des Satzes in 2.2.4 folgt dann (etwa durch Induktion über den Grad m des Polynoms), daß die Folge $c_n = p(a_n)_{n=1,2,...}$ ebenfalls konvergiert, und zwar gegen $p(a) = \alpha_m a^m + \alpha_{m-1}a^{m-1} + ... + \alpha_1 a + \alpha_0$. Als Fazit:

Tatsache:

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \;=\; a$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} p(a_n) \;=\; p(a)$.

2.2.7 "Unbestimmte" Ausdrücke

Wir betrachte die "Grundfolge" $a_n = n, n = 1, 2, ...$ und setzen sie ein in das Polynom

$$\alpha_m x^m + \; \alpha_{m-1}x^{m-1} + \; ... \; + \; \alpha_1 x + \; \alpha_0 \;=:\; p(x)$$

mit $\alpha_m \neq 0$. D.h. wir betrachten die

$$p(n) \ := \ \alpha_m n^m + \ \alpha_{m-1} n^{m-1} + \ ... \ + \ \alpha_1 n + \ \alpha_0 \ \ , \ n = 1, 2, ... \ .$$

Tatsache 1

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}(p(n)) \ = \ \begin{cases} \infty & \alpha_m > 0 \\ -\infty & \alpha_m < 0 \end{cases}$

Beweis: Man hat nach den Rechenregeln

$$\begin{array}{ccccccccc} p(n) & = & n^m(\alpha_m & + \alpha_{m-1}\frac{1}{n} & + \alpha_{m-2}\frac{1}{n^2} & + ... + & \alpha_1\frac{1}{n^{m-1}} & + \alpha_0\frac{1}{n^m} \ ) \ , \\ n\to\infty \downarrow & & \downarrow \ \ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \lim\limits_{n\to\infty}(p(n)) & & \infty \ \ \alpha_m & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array}$$

und somit: $\lim\limits_{n\to\infty}(p(n)) \ = \ \infty \cdot \alpha_m \ = \ \begin{cases} \infty & \alpha_m > 0 \\ -\infty & \alpha_m < 0 \end{cases}$ □

Wir haben dabei das in 2.2.4 beschriebene formale Rechnen mit den Zeichen $\pm\infty$ benutzt. Zum dort angegebenen “unbestimmen Ausdruck” $\frac{\infty}{\infty}$ seien folgende Beispiele betrachtet. Sei:

$$\beta_k x^k + \beta_{k-1}x^{k-1} + ... + \beta_1 x + \beta_0 \ =: \ q(x) \ , \ \beta_k \neq 0 \ \ ,$$

ein weiteres Polynom. Wir nehmen an, daß $q(n) \neq 0$ für alle n und untersuchen

$r(x) \ := \ \dfrac{p(x)}{q(x)}$ und die Folge der $r(n) \ := \ \dfrac{p(n)}{q(n)}$, $n = 1, 2, ...$. Es ist

$$r(n) = \frac{n^m(\alpha_m \ + \ \alpha_{m-1}\frac{1}{n} \ + \ \alpha_{m-2}\frac{1}{n^2} \ + \ ... \ + \ \alpha_1\frac{1}{n^{m-1}} \ + \ \alpha_0\frac{1}{n^m} \ )}{n^k(\beta_k \ + \ \beta_{k-1}\frac{1}{n} \ + \ \beta_{k-2}\frac{1}{n^2} \ + \ ... \ + \ \beta_1\frac{1}{n^{k-1}} \ + \ \beta_0\frac{1}{n^k} \ )}$$

Nach den Rechenregeln folgt wie im Beweis der Tatsache 1 :

$$\lim_{n\to\infty} r(n) \ = \ \lim_{n\to\infty} n^{m-k} \cdot \frac{\alpha_m}{\beta_k} \ , \quad \text{und daraus schließlich}$$

Tatsache 2

$$\text{Es ist} \quad \lim_{n\to\infty} r(n) \ = \ \begin{cases} \infty & m > n \text{ und } \dfrac{\alpha_m}{\beta_k} > 0 \\ -\infty & m > n \text{ und } \dfrac{\alpha_m}{\beta_k} < 0 \\ \dfrac{\alpha_m}{\beta_k} & m = n \\ 0 & m < k \end{cases}$$

Registriere:
Für $m, k \geq 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) \ = \ \pm\infty \ = \ \lim\limits_{n\to\infty} q(n)$. Nach den Rechenregeln wäre also $\lim\limits_{n\to\infty} r(n)$ so etwas wie $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, Daß dieser Ausdruck keinen wohldefinierten Sinn hat, sieht man an der Tat-

sache 2 : Der Ausdruck nimmt von Fall zu Fall ganz verschiedene Werte an.

Zusatz:

(1) Man kann auch die negative Grundfolge $(-n)_{n=1,2,...}$ betrachten. Sie hat den uneigentlichen Limes $-\infty$. Setzt man sie in unsere Polynome $p(x)$ und $q(x)$ ein, so erhält man als Grenzwerte die Werte für die (positive) Grundfolge multipliziert mit $(-1)^m$ im Falle von $p(x)$, und multipliziert mit $(-1)^{m-k}$ im Falle von $r(x)$.

(2) Statt der Grundfolgen kann man auch jede andere Folge $(a_n)_{n=1,2,...}$ betrachten, die uneigentlich konvergiert: Man kann die Folge der $p(a_n), n = 1, 2, \ldots$ und die Folge der $r(a_n), n = 1, 2, \ldots$ untersuchen. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, so sind die Grenzwerte dieselben wie bei $(n)_{n=1,2,...}$ und ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, so sind die Grenzwerte dieselben wie bei $(-n)_{n=1,2,...}$.

2.2.8 Konvergenzkriterien

Es seien $(a_n)_{n=0,1,...}, (b_n)_{n=o,1,...}$ und $(c_n)_{n=0,1,...}$ Folgen.

Konvergenzkriterien für Folgen:

(1) (<u>Monotoniekriterium</u>) Ist $(a_n)_{n=0,1,...}$ monoton wachsend (d.h.ist $a_{n+1} > a_n$ für alle $n = 0, 1, \ldots$) und nach oben beschränkt (d.h. es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq C$ für alle n=1,2,...), so ist $(a_n)_{n=0,1,...}$ konvergent.
Ebenso: Ist die Folge $(a_n)_{n=0,1,...}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist sie konvergent.

(2) (<u>Einschließungskriterium</u>) Es gelte $a_n \leq c_n \leq b_n$. Außerdem seien $(a_n)_{n=0,1,...}$ und $(b_n)_{n=o,1,...}$ konvergent mit demselben Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(c_n)_{n=0,1,...}$ gegen a.

(3) (<u>Cauchykriterium</u>) Es gilt:

$$(a_n)_{n=0,1,...} \text{ ist konvergent } \iff \begin{cases} \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N > 0 \text{ ,} \\ \text{so daß für alle } n, m \geq N \text{ gilt:} \\ |a_n - a_m| < \varepsilon \end{cases}$$

Anmerkung:
Mittels (1) beweist man die Konvergenz der “Zinsfolge” $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
(2) (wie (1)) erlauben, Konvergenz festzustellen, ohne daß man den Grenzwert schon im voraus kennt.

Konvergenzkriterien für Reihen:

(1) <u>Ein notwendige Kriterium</u> für Konvergenz:
Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) (Cauchykriterium für Reihen)

$$\text{Die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} \iff \begin{cases} \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N > 0\,, \\ \text{so daß für alle } n, m \geq N \text{ gilt:} \\ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon \end{cases}$$

(3) (Majorantenkriterium) Es seien $a_n \geq 0$ für alle n und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sei konvergent.

Ist dann $0 \leq |b_n| \leq a_n$ für alle n (oder auch nur für alle n ab einem festen N), so ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent.

Man nennt dann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(4) Quotientenkriterium Es sei $a_n \neq 0$ für alle $n = 0, 1, \ldots$.

Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q \overset{!}{<} 1$ so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Beispiele:

Zu (3) : Man möchte die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

untersuchen. Eine Majorante ist die Reihe mit den Gliedern

$$a_1 = 1,\ a_n = \frac{1}{n(n-1)}\ ,\quad n = 2, 3, \ldots.$$

Diese Reihe ist konvergent mit Summe 2 (Beweis wie bei (4) der Tatsache in 2.2.2). Nach dem Majorantenkriterium:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{ist konvergent.}$$

(Information: Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Der Beweis davon ist schwierig.)

Zu (4) : Betrachte die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$.

Es ist $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{n\,!}{(n+1)\,!} = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 =: q < 1$. Nach dem Quotientenkriterium ist also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!}$ konvergent.

Als Information: Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} = e \quad (= \lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n)$.

2.2.9 Folgen und Wachstum

Monoton wachsende Folgen wurden schon betrachtet (z.B. im Monotoniekriterium in 2.2.8). Noch einmal die Definition:

Bezeichnung 1 : Sei $(a_n) := (a_n)_{n=1,2,...}$ eine Folge. Dann heißt (a_n)

monoton wachsend	$:\Longleftrightarrow$	$a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n = 1, 2, ...$
streng monoton wachsend	$:\Longleftrightarrow$	$a_{n+1} > a_n$ für alle $n = 1, 2, ...$
monoton fallend	$:\Longleftrightarrow$	$a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n = 1, 2, ...$
streng monoton fallend	$:\Longleftrightarrow$	$a_{n+1} < a_n$ für alle $n = 1, 2, ...$

Die Frage nach der Konvergenz von solchen monotonen Folgen haben wir beantwortet: Sind sie beschränkt, so sind sie konvergent (Monotoniekriterium) [1ex]
Eine weitere interessante Frage ist:
Gegeben zwei monoton wachsende Folgen, die gegen ∞ konvergieren. Welche von beiden wächst "am schnellsten" ?

Bezeichnung 2 :
Es sei $a_n = Kq^n$ mit $K > 0$ und $q > 1$, und es sei $b_n = Ln^k$ mit $L > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beide konvergent gegen ∞.

Bei der Folge a_n spricht man von exponentiellem Wachstum (das n steht im Exponenten), bei der Folge b_n von polynomialem Wachstum .

Tatsache (exponentielles Wachstum "schlägt" polynomiales Wachstum):

Seien K , $L > 0, q > 1, k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Kq^n}{Ln^k} = \infty$$

Beweis: Später, bei mehr Theorie (Regel von Bernoulli-L'Hôpital).

Vergl. das Beispiel für $q = 1,1$ und $k = 5$ in der Vorlesung. Bei diesen Daten "überholt" die Folge q^n die Folge n^k zwischen $n = 299$ und $n = 300$.

2.3 Aufgaben

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Folge

$$x_0 = 1, \qquad x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}) .$$

Berechnen Sie jeweils die ersten 4 Folgenglieder für

a) $a = 2$ b) $a = 4$

Haben Sie eine Vermutung, ob diese Folgen konvergieren? Wenn ja, wogegen?

Aufgabe 2. Die Bundesregierung stiftet einen Förderpreis für mathematisch interessierte Studentinnen und Studenten. Dazu wird das Stiftungskapital von 42 000 EUR zu 5% jährlich verzinst.

Wieviel kann pro Jahr ausgezahlt werden, wenn gleich mit der Auszahlung begonnen wird? Wie hoch hätte die Verzinsung sein müssen, damit die Auszahlung doppelt so hoch gewesen wäre?

Aufgabe 3.
Untersuchen Sie, welche der nachstehenden Folgen konvergent, welche divergent sind. Wie lautet im Fall der Konvergenz der Grenzwert?

a) $a_n = \dfrac{5n^2 - 4n^5 + 7n - 1}{n^3 + 2n^5 + 1}$

b) $b_n = \dfrac{4n - 5n^2 + 20n^3}{n^4 + n^2 + 3n + 10}$

c) $c_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 5}{n^2 + 2n + 100}$

d) $d_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$

e) $e_n = (-n)^n$

f) $f_n = n + \dfrac{n+1}{n^2}$

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie den Wert folgender Reihen für festes N. Wie verhalten sich die Reihen, falls $N \to \infty$ geht?

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{3^{k+2}}{4^{k-1}}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{2^k + 3^k}{4^k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{2^k \cdot 3^k}{4^k}$

Aufgabe 5.
Ein Wirtschaftszweig wird zur Zeit jährlich mit 1 Mio EUR gefördert. Die Regierung beschließt, die Förderung auslaufen zu lassen, und zwar soll der Förderbetrag jedes Jahr um 10% gekürzt werden. Wieviel Geld wird insgesamt noch in diesen Wirtschaftszweig investiert werden?