1 Analysis in einer Variablen

1 Die reellen Zahlen

1.1 Die gängigen Zahlbereiche

Der Abschnitt dient insbesondere zum Einführen der benutzten Nomenklatur.

1.1.1 Beschreibung der Zahlbereiche

Tabelle der Zahlbereiche

Zahlbereich	Bezeichnung
die natürlichen Zahlen	$\mathbb{N}$
die natürlichen Zahlen mit der Null	$\mathbb{N}_0$
die ganzen Zahlen	$\mathbb{Z}$
die rationalen Zahlen (Brüche)	$\mathbb{Q}$
die reellen Zahlen	$\mathbb{R}$
die komplexen Zahlen	$\mathbb{C}$

Kurze Beschreibung:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \longleftarrow$ "aufzählende" Mengenschreibweise (vergl. 1.1.2)
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ enthält alle ganzen Zahlen und dazu alle Brüche der Form $\frac{p}{q}$ mit p und q aus $\mathbb{Z}$ und $q \neq 0$, also Zahlen wie $\frac{1}{2}, -\frac{12345}{999}$ usw.
- $\mathbb{R}$ enthält alle rationalen Zahlen, dazu z.B. die diversen Wurzeln wie $\sqrt{2}$, $\sqrt[7]{\frac{2}{3}}$ u.a., außerdem Zahlen wie e, π (s. später) und unübersehbar viele andere Zahlen.

  Reelle Zahlen allgemein gesehen sind, obwohl als mathematische Grundlage betrachtet, verhältnismäßig "künstliche" Objekte. Mathematisch gibt es für sie formal ganz verschiedenartige Definitionen. Übereinstimmung gibt es dabei in den mathematischen Eigenschaften.

- $\mathbb{C}$ enthält eine ("künstliche") Zahl i mit $i^2 = -1$ und besteht dann aus allen "Zahlen" der Form $\alpha + \beta i$, wo α, β beliebige reelle Zahlen sind (mehr Informationen später).

Bemerkung

Jeder der eingeführten Zahlbereiche enthält alle Zahlen aus den davor genannten Bereichen, aber auch neue Zahlen.
Insbesondere gilt: Es gibt reelle Zahlen, die nicht aus $\mathbb{Q}$ sind, d.h. die sich nicht als Brüche ganzer Zahlen schreiben lassen. Solche Zahlen heißen *irrationale Zahlen*.
Z.B. ist $\sqrt{2}$ irrational, d.h. es gibt keine ganzen Zahlen p, q, $q \neq 0$, mit $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

1.1.2 Erste Bemerkungen zur Mengenschreibweise

Schon bei der Beschreibung der Zahlbereiche in 1.1.1 haben wir der Kürze halber Mengenschreibweise benutzt. In der Mathematik ist die Mengenschreibweise in vieler Hinsicht kaum zu umgehen.
Wir führen im Folgenden in die allerersten Grundlagen einer allgemeinen Mengenlehre ein.

Unser Standpunkt:
Die Benutzung der Mengensprache sollte man als Beherzigung eines Prinzips ansehen, welches in allen Wissenschaften und auch sonstwo angebracht ist, des Prinzips nämlich, daß man stets möglichst genau angeben soll, worüber man spricht.

Ein nichtmathematisches Beispiel:
Bei einer korrekten demokratischen Wahl muß genau festgelegt sein, was die Menge der Wähler ist.

Mengen:

Intuitive **Definition einer Menge** (nach Cantor, verkürzt):

> Eine Menge ist eine wohlbestimmte Gesamtheit von Objekten. Diese Objekte heißen die Elemente der Menge.

In der Mathematik sind die Objekte Zahlen, Funktionen; auch Mengen selbst können Elemente anderer Mengen sein.

Schreibweisen:

"$x \in M$" bedeutet: "das Objekt x ist Element der Menge M"
z.B. $10 \in \mathbb{N}$.

"$x \notin M$" bedeutet: "x ist nicht Element von M"
z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$$\left.\begin{array}{l} M = \{1, 2, 3\} \\ \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \end{array}\right\} \text{aufzählende Schreibweise}$$

$$\left.\begin{array}{l} M = \{x \mid x \text{ ist eine gerade ganze Zahl }\} \\ M = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^4 + x^2 - 2 = 0\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Beschreibung durch} \\ \text{Eigenschaften der Elemente} \end{array}$$

Die leere Menge $\emptyset$:

Aus vielen, auch logischen Gründen ist es sinnvoll, die Existenz einer sogenannten **leeren Menge**, geschrieben $\emptyset$, zu postulieren. Sie ist charakterisiert durch die Eigenschaft: Für alle Objekte x gilt $x \notin \emptyset$; mit anderen Worten: sie hat keine Elemente.

Teilmengen:

Definition: M und N seien Mengen. Dann:

N heißt **Teilmenge** von M $\;:\Longleftrightarrow\;$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Jedes Element von } N \text{ ist auch Ele-} \\ \text{ment von } M \text{ (kurz: } x \in N \Rightarrow x \in M)\end{array}\right.$

(Zur Schreibweise mit den “dicken” Pfeilen vergl.die Vorlesung.)

Schreibweisen und Bemerkungen:

$N \subseteq M$ für “ N ist Teilmenge von M ” .
Es ist $N \subseteq M$, auch wenn $N = M$. Es gilt $\emptyset \subseteq M$ für alle Mengen M .
Ist N ist Teilmenge von M, aber $N \neq M$ ” , so schreiben wir dafür auch $N \subsetneq M$.

(In vielen Büchern wird auch die Bezeichnung $N \subset M$ benutzt. Manchmal steht sie für $N \subseteq M$, manchmal auch für $N \subsetneq M$. Man muß sich daran gewöhnen, daß dieselben Objekte und Sachverhalte von verschiedenen Autoren veschieden bezeichnet sein können.)

Beispiele:

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$

(ii) $\{-1, 1\} \subseteq \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^4 + x^2 - 2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}$.

(iii) die Zahlbereiche, geschrieben als “Zahlenturm”:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

(iv) Zu $n \in \mathbb{N}$: $\{1, 2, ..., n\} \subseteq \mathbb{N}$ (“Zahlenabschnitte”).

Die zweite Inklusion bei (ii) zeigt die häufigste Art, Teilmengen anzugeben: N besteht aus denjenigen Elementen aus M , welche bestimmte (zusätzliche) Eigenschaften besitzen.

Durchschnitt, Vereinigung, Differenz:

M und N seien Mengen. Folgendes sind dann wohldefinierte Mengen:

$$\begin{array}{lcll} M \cap N & := & \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\} & =: \text{ der Durchschnitt von } M \text{ und } N \\ M \cup N & := & \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\} & =: \text{ die Vereinigung von } M \text{ und } N \\ M \setminus N & := & \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\} & =: \text{ die Differenz von } M \text{ und } N \end{array}$$

Ist $N \subseteq M$, so heißt $M \setminus N$ auch das Komplement von N in M .
Bemerkung: Haben M und N kein Element gemeinsam, so ist $M \cap N = \emptyset$. Ist $N \subseteq M$, so ist $M \cap N = N$ und $N \setminus M = \emptyset$.

1.1.3 Darstellung der reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche

Meist (z.B. auf dem Taschenrechner) werden reelle Zahlen als Dezimalbrüche dargestellt. Z.B.

$2 = 2,0$

$\frac{40}{3} = 13,333... = 13,\overline{3}$ ↖ Periode 3

$\frac{101}{35} = 2,8857142857142857... = 2,8\overline{857142}$ (Periode 857142)

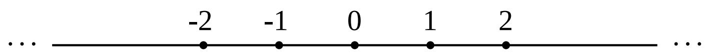
$\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

$e = 2,7182818\dots$

Dabei: Die rationalen Zahlen liefern Dezimalbrüche mit (immer wiederkehrenden) Perioden (inklusive Periode 0 wie bei $2 = 2,0 = 2,\overline{0}$).
Die irrationalen Zahlen liefern unendliche Dezimalbrüche ohne Periode (insbesondere enden die Brüche nicht nach endlichen vielen Stellen: sie hätten sonst die Periode 0). Sie können als konkrete Dezimalbrüche nur approximativ angegeben werden, indem man die Darstellung (ungenauerweise) irgendwo abbricht.

1.1.4 Die Zahlengerade

Zur Veranschaulichung stellt man sich die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Zahlengerade vor:



Die Zahlengerade gibt insbesondere die **Größer-Kleiner-Beziehung** in $\mathbb{R}$ wieder:
Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen $a < 0, a = 0$ oder $a > 0$.
Allgemeiner:
Für je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen $a < b, a = b$ oder $a > b$.
Dabei: Von zwei verschiedenen Zahlen steht die größere auf der Zahlengeraden rechts von der kleineren. (Mehr und Systematischeres in 1.3 .)
Die Darstellung als Gerade, d.h. als kontinuierlicher Strich, soll auch symbolisieren, daß die reellen Zahlen “kontinuierlich” aufeinander folgen und daß es keine “Lücken” in $\mathbb{R}$ gibt (s. wieder in 1.3).

1.2 Rechnen

In allen aufgeführten Rechenbereichen kann man addieren und multiplizieren nach bekannten Rechenregeln und man hat diverse nützliche Formeln.

1.2.1 Die Rechenaxiome

Wir notieren die Grundregeln (“Rechenaxiome”), aus denen sich alle Rechenregeln, auch die Gültigkeit komplizierter Formeln ableiten lassen. Die Regeln gelten für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(A1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (Assoziativität der Addition)

(A2) Es gibt die $0 \in \mathbb{R}$ mit
$a+0 = 0+a = a$

(A3) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es $-a \in \mathbb{R}$ mit
$a+(-a) = (-a)+a = 0$

(A4) $a+b = b+a$ (Kommutativität der Addition)

(M1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativität der Multiplikation)

(M2) Es gibt $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, mit
$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

(M3) Zu $a \neq 0(!)$ gibt es a^{-1} mit
$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$

(M4) $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität der Multiplikation)

(D) $\left.\begin{array}{l} a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot a \end{array}\right\}$ (Distributivgesetze (Klammerregeln))

Schreibweise: Wir lassen den Punkt beim Multiplizieren auch oft weg: ab bedeutet $a \cdot b$.

Es sei noch erinnert an die folgende "Faustregel":

Punktrechnen geht vor Strichrechnen.

Sie garantiert, daß klar ist, wie etwa die rechten Seiten bei (D) auszurechnen sind.

Das sind schon alle Grundregeln. Alles weitere Rechnen in $\mathbb{R}$ läßt sich daraus ableiten.

1.2.2 Abgeleitetes Rechnen

Das **Subtrahieren** in $\mathbb{R}$:

$$a - b := a + (-b)$$

(zu ":=" s.die Vorlesung).

Das **Dividieren** durch Elemente $b \neq 0$ (!):

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} \qquad (= b^{-1}a)$$

Weitere Regeln:

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{Für alle } a \in \mathbb{R}: & a+b = a+c & \Longleftrightarrow & b=c \\ \text{Für alle } a \neq 0(!): & a \cdot b = a \cdot c & \Longleftrightarrow & b=c \end{array}\right\} \text{Kürzungsregeln}$$

$$\begin{aligned} (-1) \cdot a &= -a \\ -(-a) &= a \\ -(a+b) &= -a-b, \text{ und } -(a-b) = -a+b \\ (-a) \cdot b &= a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \\ (-a) \cdot (-b) &= a \cdot b \end{aligned}$$

("minus mal minus gibt plus)"

$$\left.\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)\cdot(a-b) & = & a^2-b^2 \end{array}\right\} \text{Binomische Formeln}$$

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ oder } b = 0 \qquad \text{(Nullteilerfreiheit)}$$

1.2.3 Summen- und Produktzeichen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (d.h. man betrachtet n beliebige reelle Zahlen in der durch die Indizierung gegebenen Reihenfolge).

Definiere

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & = & a_1 + a_2 + \ldots + a_n := (\ldots(((a_1+a_2)+a_3)+\ldots+)+a_n) \\ \prod a_i & = & a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n := (\ldots(((a_1 \cdot a_2)\cdot a_3)\cdot \ldots)\cdot a_n) \end{array}$$

(zum “laufenden” Index i, zur Klammerung und zur Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren siehe Vorlesung.)

Beispiele: $n = 10$, $a_i = i$.

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{10} a_i & = & \sum\limits_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + \ldots + 10 = 55 \\ \prod\limits_{i=1}^{10} a_i & = & \prod\limits_{i=1}^{10} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 = 3\,628\,800 \end{array}$$

Das Produkt $\prod_{i=1}^{n} i$ hat eine besondere Bedeutung.

Bezeichnung: Für $n \in \mathbb{N}$ wird definiert

$$n\,!\ \text{ (sprich: } n \text{ Fakultät) } := \prod_{i-1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$!

Der Vollständigkeit halber definiert man noch $0\,! = 1$.

Die Zahlen $n!$ spielen eine besondere Rolle in der Abzähltheorie (Kombinatorik), s. 1.4 .

Oft hat man auch **doppelt indizierte Zahlenmengen**:

Gegeben $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ (insgesamt $m \cdot n$ Zahlen).
Häufiges Beispiel: $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, und $a_{ij} := a_i \cdot b_j$.

Es gelten die **(Doppel-)Summenregeln** (gemäß Assoziativ- und Kommutativgesetzen):

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\\
\prod_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots n}} a_{ij} &= \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} a_{ij}\\
\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) &= \sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots n}} a_i b_j
\end{aligned}$$

Wichtige Begriffe mit Summenzeichen:

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann:

Der **Mittelwert** der $a_1, \dots, a_n$ ist definiert als $\bar{a} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Die **Varianz** der $a_1, \dots, a_n$ ist definiert als $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2$.

Zur Bedeutung der Varianz vergl. die Statistik.

1.2.4 Potenzen

Definition (Potenzen): Seien $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Man definiert

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n}-\text{Faktoren}} & \text{, falls } n > 0 \\ 1 & \text{, falls } n = 0 \\ \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}}_{\substack{(-\text{n})-\text{Faktoren}\\ (-\text{n}=|\text{n}|>0)}} & \text{, falls } n < 0 \end{cases}$$

Potenzregeln:

Wenn alle Ausdrücke definiert sind (d.h. $a \neq 0$, $b \neq 0$ im Falle negativer Exponenten), gilt für alle $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
a^n \cdot a^m &= a^{n+m}\\
(a^n)^m &= a^{n \cdot m}\\
(a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n
\end{aligned}$$

Wir geben nun in 1.2.5 und 1.2.6 noch zwei grundlegende Formeln mit wichtigen Anwendungen.

1.2.5 Die Zahl $\binom{n}{2}$

Tatsache 1: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$!

Beweis: Die gesuchte Summe $\sum_{i=1}^{n} i$ sei S. Dann

$$\begin{array}{lccccccccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-1 & + & n \\ \text{und} & S & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

$$\text{Also} \quad 2S = S+S = n+1 + n+1 + n+1 + \dots + n+1 + n+1$$

(Beim Addieren $S+S$ ergeben übereinander stehende Zahlen addiert stets $n+1$. Dieser Summand tritt n mal auf.)

Ergebnis: $2S = n \cdot (n+1)$

Gekürzt durch 2 erhält man : $S = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$, wie behauptet. □

Bezeichnung:

$$\text{Für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \text{ sei } \binom{n}{2} := \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Beispiel: Nach obiger Tatsache ist $\displaystyle\binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$.

Interpretation:

Tatsache 2 (Interpretation von $\binom{n}{2}$):

Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und N sei eine Menge von n Elementen (z.B. $N = \{1, 2, \dots, n\}$).
Dann: Die Anzahl aller 2-elementigen Teilmengen von N ist $\binom{n}{2}$.
Oder, vom Standpunkt der Statistik aus gesehen:
$\binom{n}{2}$ ist die Anzahl der verschiedenen Stichproben aus zwei Elementen, die man einer n-elementigen Menge entnehmen kann.

Beispiel: Sei $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Es gibt genau $6 = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2}$ 2-elementige Teilmengen (d.h. verschiedene Weisen, zwei Zahlen aus den vier Zahlen auszuwählen) von N , nämlich

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \quad \text{(“lexikographisch” aufgezählt)}$$

Aus Tatsache 2 folgt z.B.: Bei einem Lotto, bei dem zwei Zahlen aus n auszuwählen sind, ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Richtige zu haben, gleich $\dfrac{1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2}{n \cdot (n-1)}$.

Der Beweis der Tatsache 2 ist ein Muster für einen mathematischen Beweis. Er hat einen formalen Charakter (“vollständige Induktion”) und eine inhaltliche Idee für das Hauptargument.

Zuerst: **Beweise mit vollständiger Induktion**

Gegeben: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine Aussage $A(n)$, die für jedes $n \geq n_0$ vorliegt.
(Z.B. die Aussage der Tatsache 2 für $n \geq 2$.)

Man zeigt:

(1) Die Aussage gilt für $n = n_0$ (Induktionsanfang).

(2) Gilt die Aussage für $n \geq n_0$, so auch für $n+1$ (Induktionsschluß).

Dann gilt als bewiesen:

Die Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Nun: **Beweis** der Tatsache 2 mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n = 2$. Denn $\dfrac{2 \cdot (2-1)}{2} = 1$, was stimmt.

Induktionsschluß: Die Aussage sei für alle n-elementige Mengen, $n \geq 2$, als richtig vorausgesetzt. Sei dann M eine Menge von $n+1$ Elementen. Sei $a \in M$, die restlichen n Elemente seien $a_1, \ldots, a_n$ genannt und N sei $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Es gibt in M 2-elementige Teilmengen zweierlei Art. Der erste Typ besteht aus solchen Teilmengen, die a nicht enthalten. Das sind genau die 2-elementigen Teilmengen von N. Nach Voraussetzung gibt es genau $\binom{n}{2}$ davon.

Der zweite Typ besteht aus den Teilmengen, die a enthalten. Da a mit jedem der $a_1, \ldots, a_n$ kombiniert werden kann, gibt es genau n Teilmengen vom zweiten Typ.

Insgesamt: Die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von M ist

$\binom{n}{2}$ (vom ersten Typ) $+$ n (vom zweiten Typ) =

$$= \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n^2 - n + 2n}{n} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

D.h. die Aussage gilt für $n+1$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion also: Die Aussage gilt für alle $n \geq 2$ wie behauptet. $\square$

In 1.4 werden wir Verallgemeinerungen $\binom{n}{m}$, für $0 \leq m \leq n$, von $\binom{n}{2}$ kennenlernen und die Rolle dieser Zahlen bei Abzählproblemen diskutieren.

Defintion 2: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n := a + n \cdot b$.
Man nennt die Folge der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine **arithmetische Zahlenfolge** (mit Differenz b).

Tatsache 3

Sei $a_k = a + kb$, $k = 0, \ldots, n$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1) \cdot a + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot b$$

Bew.: $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = (n+1)\cdot a + \sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot b = (n+1)a + b \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} k \underset{\text{Tats.1}}{=} = (n+1)a + \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot b.$

Typische Anwendung

Rückzahlung einer Schuld mit festem Tilgungssatz und zusätzlich anfallenden Zinsen:
Vorgegeben: Ein Darlehen der Summe S, $p\%$ Verzinsung jährlich, $n \in \mathbb{N}$.
Prozedur: Am Ende eines jeden Jahres (nachschüssig) zahlt der Gläubiger dem Schuldner die Summe $\frac{S}{n}$ plus die für das Jahr fälligen Zinsen.
Die Zinsen für das k-te Jahr $k = 1, 2, ..., n$ sind dann

$$Z_k = (S - (k-1)\frac{S}{n}) \cdot \frac{p}{100}$$

Nach n Jahren ist die Schuld getilgt. Die während dieser Zeit gezahlten Zinsen belaufen sich auf

$$\begin{aligned} Z &:= Z_1 + \ldots + Z_n = \frac{p}{100} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (S - (k-1)\frac{S}{n} \right) \\ &= \frac{p}{100}\left(nS - \frac{S}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1) \right) \underset{\mathrm{k-1 \mapsto i}}{=} \frac{p}{100}\left(n\cdot S - \frac{S}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i \right) \\ &= \frac{p}{100}\left(n\cdot S - \frac{S}{n}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2} \right) = \frac{p}{100}\left(\frac{2nS - S\cdot(n-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

Also:

$$Z = \frac{p}{200}\cdot(n+1)\cdot S$$

Rechenbeispiel: $S = 10\,000$, $p = 6$, $n = 10$, $z = 3\,300$

1.2.6 Eine Formel für die Finanzmathematik

Tatsache:

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + \ldots + a^n \underset{(*)}{=} \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} \quad \left(= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \right)$$ **!**

Allgemeiner: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}a^k = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \ldots + b\,a^{n-1} + a^n \overset{!}{=} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$$

Beweis: Sei $S := b^n + b^{n-1}a + \ldots + ba^{n-1} + a^n$. Dann

$$\begin{aligned} b\,S &= b^{n+1} + b^n a + b^{n-1}a^2 + \ldots + b\,a^n \\ -a\,S &= \quad - b^n a - b^{n-1}a^2 - \ldots - b\,a^n - a^{n+1} \end{aligned}$$

Man sieht: Übereinander stehende Terme heben sich beim Subtrahieren auf.

Also ergibt sich

$$bS - aS = b^{n+1} - a^{n+1} \underset{\substack{\text{gekürzt durch} \\ \text{b}-\text{a} \neq 0}}{\Longrightarrow} S = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \,. \qquad \square$$

Die Formel $(*)$ der Tatsache ist der Ausgangspunkt für eine ganze Reihe von Formeln beim Zinseszins.

Beispiel:

Tilgung eines Darlehens D in gleichen Jahresraten beim jährlichen Zinssatz $p\%$.
Am Ende eines jeden Jahres (nachschüssig) werde die (stets gleiche) Summe A (Annuität) zurückgezahlt. Die Restschuld nach n Jahren sei R_n. Sei $a = 1 + \frac{p}{100}$. Dann:

$$\begin{aligned} R_1 &= Da - A \\ R_2 &= (Da - A) \cdot a - A = Da^2 - Aa - A \\ &\vdots \\ R_n &= Da^n - Aa^{n-1} - \ldots - Aa - A = Da^n - A(a^{n-1} + \ldots + a + 1) \end{aligned}$$

Mittels $(*)$: also

$$R_n = Da^n - A \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Setzt man $R_n = 0$, so kann man bei vorgegebener Tilgungsdauer die Annuität A ausrechnen:

$$A = \frac{D \cdot a^n \cdot (a-1)}{a^n - 1} \,.$$

1.3 Abschätzen

1.3.1 Ordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$

Wie beim Rechnen braucht man nur wenige Sachverhalte zu postulieren, die dann alle Mathematik rund ums Abschätzen implizieren.

Grundlegender Sachverhalt:

> Es gibt eine wohlbestimmte Teilmenge von R, deren Elemente positiv heißen.
> Man schreibt $x > 0$ für die positiven x und $\mathbb{R}_{>0}$ für die Teilmenge aller positiven Elemente von $\mathbb{R}$.

Grundregeln (Anordnungsaxiome):

(O1) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen
$x > 0,\ x = 0,\ -x > 0$,

und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(O2) $x > 0$ und $y > 0 \implies x + y > 0$
(O3) $x > 0$ und $y > 0 \implies x \cdot y > 0$

Weitere gebräuchliche Bezeichnungen:

$$\begin{array}{rcl} x > y & :\Longleftrightarrow & x - y > 0 \\ x \geq y & :\Longleftrightarrow & x > y \text{ oder } x = y \\ x < y \text{ (bzw. } x \leq y) & :\Longleftrightarrow & y > x \text{ (bzw. } y \geq x) \end{array}$$

Einige weitere Abschätzungsregeln:

(i) $x > 0 \implies -x < 0$

(ii) $x > y$ und $y > z \implies x > z$ (Transitivität)

(iii) Für alle $a \in \mathbb{R}$: $x > y \iff a + x > a + y$

(iv) Für $a > 0$: $x > y \iff ax > ay$

(v) Für $a < 0$: $x > y \iff ax < ay$ (Anordnung kehrt sich um)

(vi) $0 < y < x \implies 0 < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$

(vii) $1 < x \implies \dfrac{1}{x} < 1$

(viii) Für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 > 0$. Insbesondere ist $1 > 0$.

(ix) Es ist $n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zusammen mit den Gleichheitsregeln ergeben sich aus all dem auch entsprechende Regeln für “ $\geq$ ”.

1.3.2 Betrag und Abstand

Definition:

Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man $|x| := \begin{cases} x & , \text{ falls } x \geq 0 \\ -x & , \text{ falls } x < 0 \end{cases}$

$|x|$ heißt der **(Absolut-)Betrag** von x. Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $|x - y|$ der **Abstand** zwischen x und y.

Regeln über den Betrag: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ nur für $x = 0$.

$|-x| = |x|$.

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

$|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung für den Betrag)

$|x - y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big| \geq |x| - |y|$.

Regeln über den Abstand: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$|x - y| = |y - x|$ (Symmetrie)

$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ (Dreiecksungleichung für den Abstand)

Typische Probleme bzw. Aufgaben:

Übung: Man mache sich klar, welche Regeln jeweils im folgenden benutzt werden.

(1) Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{2}{x-1} \geq \dfrac{1}{x+1}$.

Erst einmal: Die Ungleichung hat wegen der Nenner nur Sinn für $x \neq \pm 1$.
Bei den verbleibenden x muß man drei Fälle untersuchen:
1. Fall: $x > 1$
2. Fall: $-1 < x < 1$.
3. Fall: $x < -1$.

Wir multiplizieren (erweitern) die Ungleichung mit $(x+1)(x-1) \neq 0$. Es ist

$$(x+1)(x-1) \quad \begin{cases} > 0 & \text{im 1. Fall} \\ < 0 & \text{im 2. Fall} \\ > 0 & \text{im 3. Fall} \end{cases}$$

Wir erhalten also nach der Erweiterung die Gleichungen gemäß den Regeln (iv) und (v) in 1.3.1 :

1. Fall: $2(x+1) \geq x-1 \iff x \geq -3$
Es folgt: Alle x mit $x > 1$ sind Lösungen.

2. Fall: $2(x+1) \leq x-1 \iff x \leq -3$
Es folgt: Keine x mit $-1 < x < 1$ sind Lösungen.

3. Fall: $2(x+1) \geq x-1 \iff x \geq -3$
Es folgt: Von den x mit $x < -1$ sind Lösungen genau die
$x \in \mathbb{R}$ mit $-3 \leq x < -1$.

Gesamtergebnis:
Die Lösungsmenge unseres Problems besteht in der Menge aller x mit $-3 \leq x < -1$ zusammen mit der Menge aller x mit $x > 1$.

(2) Ein Unternehmen hat beschlossen, daß der Preis x für eine Ware höchstens 20 Prozent von dem Richtwert 96 Euro abweichen soll. Was ist die erlaubte Preisspanne?

$$\text{Ansatz:} \quad |x - 96| \leq \frac{1}{5}x$$

1. Fall: $x \geq 96$. Dann $|x-96| = x - 96$.
Also: $x - 96 \leq \frac{1}{5}x \iff \frac{4}{5}x \leq 96 \iff x \leq 120$

2. Fall: $x < 96$. Dann $|x-96| = 96 - x$.
Also: $96 - x \leq \frac{1}{5}x \iff \frac{6}{5}x \geq 96 \iff x \geq 80$.

Die erlaubte Preisspanne ist also $80 \leq x \leq 120$.

1.3.3 Intervalle

Untermengen der Art $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x\}$, wie sie bei den Lösungsmengen der Aufgaben zuvor vorkamen, spielen in vielen Situationen eine besondere Rolle.

Def.: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ eine Untermenge.

$$I \text{ heißt ein (echtes) Intervall} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} I \text{ enthält mehr als ein Element} \\ \text{und für alle } x, y \in I \text{ mit } x < y \text{ gilt:} \\ \text{Auch alle } z \subset \mathbb{R} \text{ mit } x \leq z \leq y \text{ liegen in } I. \end{cases}$$

Liste der Intervalle:

Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Betrachte folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lcll} [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & \text{(abgeschlossenes endliches Intervall)} \\ [a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & \text{(links abgeschlossenes, rechts offenes endliches Intervall)} \\ ]a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} & \text{(links offenes, rechts abgeschlossenes endliches Intervall)} \\ ]a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & \text{(endliches offenes Intervall)} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} [a,\infty[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ ]a,\infty[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]-\infty,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\ ]-\infty,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\ ]-\infty,\infty[& := & \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{(unendliche Intervalle)}$$

Tatsache:

> All das sind Intervalle und jedes Intervall ist von einem in dieser Liste angegebenen Typ.

Bemerkung: Mit Intervall- und Mengenschreibweise ist z.B. die Lösungsmenge des Problems (1) in 1.3.2 gleich $[-3,-1[\ \cup\ ]1,\infty[$. Das Intervall $[-3,-1[$ hatte man erhalten als Durchschnitt $[-3,-1[\ =\ [-3,\infty[\ \cap\ ]-\infty,-1[$.

Ränder von Intervallen:

Die Zahlen a und b , dort wo sie in der Liste der Intervalle vorkommen, heißen die **Randpunkte** oder **Ränder** des entsprechenden Intervalls. Dabei heißt a der linke oder untere Rand und b der rechte oder obere Rand. Randpunkte können zum Intervall gehören oder auch nicht. Gehören sie zum Intervall so heißen die Intervalle auf der Seite des Randpunkts abgeschlossen, wenn nicht, heißen die Intervalle dort offen.

Länge eines endlichen Intervalles:

Bei den endlichen Intervallen in der Liste der Intervalle interpretiert man die Zahl $b - a$ als **Länge** des Intervalls.

1.3.4 Beschränkt und unbeschränkt

Definitionen + Beispiele + Bemerkungen + Übungen:

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ (z.B. sei M ein Intervall).

M heißt **beschränkt** $\iff$ Es gibt $C > 0$ mit $|x| = C$ für alle $x \in M$.

M heißt **unbeschränkt** $\iff$ Für alle $C > 0$ gibt es $x \in M$ mit $|x| > C$.

Übung: Man mache sich klar, daß jeder der beiden Sachverhalten, nicht nur sprachlich sondern auch logisch, die Negation des anderen ist.

Beispiele: Endliche Intervalle, z.B. $[-3, 1[$, sind beschränkt. Intervalle mit ∞ oder $-\infty$ als Grenze sind unbeschränkt.

M heißt **nach oben beschränkt** $\iff$ Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $x \leq c$ für alle $x \in M$.

So ein c heißt dann eine **obere Schranke** von M

M heißt **nach unten beschränkt** $\iff$ Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $x \geq c$ für alle $x \in M$.

So ein c heißt **untere Schranke** von M.

Beispiele: $]-\infty, b[$ ist nach oben beschränkt und jedes $c \geq b$ ist eine obere Schranke.
Entsprechend ist z.B. $]b, \infty[$ nach unten beschränkt.

$c \in M$ heißt **Maximum** von M $\iff$ $c \in M$ und $x \leq c$ für alle $x \in M$

$c \in M$ heißt **Minimum** von M $\iff$ $c \in M$ und $c \leq x$ für alle $x \in M$

Z.B. -3 ist Minimum von $[-3, 1[$.

Achtung: $[-3, 1[$ hat kein Maximum.

c heißt **Supremum** von M $\iff$ M ist nach oben beschränkt und c ist Minimum aller oberen Schranken von M

c heißt **Infimum** von M $\iff$ M ist nach unten beschränkt und c ist Maximum aller unteren Schranken von M.

Bemerkung als Übung: Maxima, Minima, Suprema und Infima sind eindeutig bestimmt.

Beispiele: Für die $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, b]$, $[a, \infty[$, $]a, \infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$ ist a das Infimum und b das Supremum.

1.3.5 Ergänzungen zur Axiomatik der reellen Zahlen

Die Unbeschränktheit von $\mathbb{R}$ wird durch folgendes Axiom gesichert:

Archimedisches Axiom:

> Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, und jedem $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \varepsilon > C$.
> (Man stelle sich ε ganz klein und C ganz groß vor.)

Daß es bei den reellen Zahlen keine "Lücken" gibt, erzwingt man durch folgendes Axiom:

Vollständigkeitsaxiom:

> Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

Dieses Axiom garantiert die Existenz von irrationalen Zahlen.

Beispiel: Sei $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. Dann ist z.B. $1 \in M$.
M ist nach oben beschränkt, denn z.B. ist $\frac{3}{2} > x$ für alle $x \in M$.
Also: M hat ein Supremum α. Man definiert: $\sqrt{2} := \alpha$.

1.4 Abzählen

Auch mit den natürlichen oder den ganzen Zahlen kann man eine höchst anspruchsvolle Mathematik mit wichtigen Anwendungen betreiben:

Stichwort z.B.: Primzahlen, mit wichtigen Anwendungen in der Theorie und Praxis der Codierung und Verschlüsselung.

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt darauf, auf einige Sachverhalte der Abzähltheorie (Kombinatorik) einzugehen. Anwendungen gibt es vor allem in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Motivation:

Etwa mathematische Neugier:
Ausgangspunkt: Binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Gesucht: Entsprechende allgemeinere Formel für $(a + b)^n$ und $n > 2$.

Oder Interesse an nützlicher Information:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Sechser im Lotto zu ziehen?
(S. Abschnitt 1.4.3 .)

1.4.1 Permutationen ohne Wiederholungen

Problem: Gegeben: $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und n paarweise verschiedene Objekte (Elemente) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (etwa die Zahlen $1, 2, \ldots, n$).

Problem: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, aus diesen n Elementen m Stücke herauszugreifen und anzuordnen (verschiedene Anordnungen der gleichen Elemente gelten als verschieden). Wiederholungen sind dabei ausgeschlosssen.

Man spricht von "Permutationen von n Elementen zur Klasse m ohne Wiederholungen".

Beispiel: $n = 4$, $m = 2$ und a_1, a_2, a_3, a_4 seien die Objekte. Die Möglichkeiten sind

$$\begin{array}{cccccc} a_1, a_2 & a_1, a_3 & a_1, a_4 & a_2, a_3 & a_2, a_4 & a_3, a_4 \\ a_2, a_1 & a_3, a_1 & a_4, a_1 & a_3, a_2 & a_4, a_2 & a_4, a_3 \end{array}$$

Es gibt also 12 Möglichkeiten.

Tatsache:

Die Anzahl $P_{n,m}$ der Permutationen von n Elementen zur Klasse m ist

$$P_{n,m} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Für $n = m$ ist also:

$$P_{n,m} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad = \quad n! \qquad \text{(s. 1.2.3)}$$

Beweis: Für das erste herauszugreifende Element gibt es n Möglichkeiten, für das zweite die noch verbliebenen $n-1$ Möglichkeiten usw. Schließlich verbleiben für das m-te herauszugreifende Element noch $n-m+1$ Möglichkeiten. Diese Anzahlen multiplizieren sich und man erhält $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ Möglichkeiten.

Schließlich: Für $n = m$ ist $n - m + 1 = 1$. □

Übung: Man mache aus diesen Argumenten einen formal korrekten Induktionsbeweis.

Anschauliche Varianten des Problems:

Gegeben seien n Personen und m durchnumerierte Sitze, $m \leq n$. Dann:
Es gibt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ Möglichkeiten, die n Personen auf die m Sïtze zu plazieren. (Oder: Möglichkeiten, die Personen in Reih und Glied zu einer Reihe von m Personen aufzustellen.)

Im Spezialfall $n = m$:
Es gibt $n!$ verschiedene Möglichkeiten, n verschiedene Elemente durchzunumerieren (bzw. anzuordnen).

1.4.2 Permutationen mit Wiederholungen

Problem: Sein n und m aus $\mathbb{N}$. Es seien n verschiedene Elemente gegeben und jedes davon liege in beliebig vielen (mindstens aber m) identischen Exemplaren vor.
Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, daraus m Stück herauszugreifen und anzuordnen?
Anschaulich: Wieviele "Wörter" aus m Buchstaben kann man aus einem n-elementigen Alphabet bilden?
("Permutation von n Elementen zur Klasse m mit Wiederholungen")

Beispiel: $n = 4$, $m = 2$ wie in 1.4.1. Die Möglichkeiten sind

$$a_1, a_1 \quad a_2, a_2 \quad a_3, a_3 \quad a_4, a_4 \text{ plus die 12 Möglichkeiten aus 1.4.1.}$$

Insgesamt also 16 Möglichkeiten.

Tatsache 1:

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen zur Klasse m mit Wiederholungen ist

$$\widetilde{P}_{n,m} = n^m.$$

Beweis: Für jeden der m “Plätze” hat man unabhängig von der Besetzung der anderen Plätze n Möglichkeiten. Das ergibt $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m-\text{Faktoren}} = n^m$ Möglichkeiten. □

Beispiel: Aus den 26 Buchstaben des deutschen Alphabets kann man formal $26^5 = 11881376$ 5-buchstabige Wörter bilden.

Eine Mischung aus den bisherigen Problemen hat man, wenn die Anzahlen von Wiederholungen vorgeschrieben sind:

Gegeben seien k verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_k$. Von a_j gebe es n_j identische Exemplare, $j = 1, \ldots, k$.

Problem: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die insgesamt $n_1+n_2+\ldots+n_k$ Elemente anzuordnen? Diese Anzahl sei $P^*_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ genannt.

Tatsache 2:

Es ist $P^*_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \dfrac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

Beweis: Sei $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Gibt man den identischen Exemplaren Markierungen, so daß alle n Elemente verschieden sind, so gibt es nach Tatsache 1 in 1.4.1 gerade $n!$ verschiedene Anordnungen. Bei einer Anordnung gibt es $n_j!$ Möglichkeiten, die n_j Exemplare vom Typ a_j untereinander zu vertauschen. Diese Vertauschungen liefern aus einer Anordnung $n_j!$ verschiedene Anordnungen. Entfernt man jedoch die Markierungen, so ergeben alle diese $n_j!$ Möglichkeiten nur eine Möglichkeit für unser Problem.

Daher: Entfernt man die Markierungen bei den a_1, bleiben noch $\frac{n!}{n_1!}$ Möglichkeiten, entfernt man noch die Markierungen bei den a_2, bleiben $\frac{n!}{n_1!n_2!}$ Möglichkeiten usw. Entfernt man schließlich alle Markierungen, so bleiben noch $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ Möglichkeiten. □

Spezialfall: $n = k$, $n_j = 1$ für $j = 1, \ldots, n$. Das ist der Spezialfall $n = m$ aus 1.4.1.

Beispiel: Wieviele 6-ziffrigen Zahlen lassen sich aus 1,1,2,2,2,3 bilden?

Hier ist $k = 3,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 1.$

Also: Es gibt $P^*_{2,3,1} = \dfrac{6!}{2!3!1!}$ = 60 Möglichkeiten.

1.4.3 Kombinationen ohne Wiederholungen

Problem: Gegeben $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

Mathematisch: Wieviele m elementige Teilmengen gibt es in einer n-elementigen Menge?

Statistisch: Wieviele verschiedene Stichproben von m Elementen kann man aus einer Menge von n Elementen entnehmen?

Anschaulich: Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, m zahlen aus n Zahlen auszusuchen? Auf die Reihnfolge kommt es diesmal nicht an, Also z.B.: Wieviele verschiedene Tipp-Möglichkeiten gibt es bei einem Lotto “m aus n” (etwa 6 aus 49)? (“Kombinationen von n Elementen zur Klasse m”)

Tatsache:

Die Anzahl $K_{n,m}$ der Kombinationen von n Elementen zur Klasse m ist

$$K_{n,m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Beweis: Zieht man m Zahlen aus n, so gibt es nach 1.4.1 $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ Möglichkeiten, wenn die Anordnung berücksichtigt wird. Läßt man die Anordnung unberücksichtigt, so fallen jeweils alle $m!$ Möglichkeiten (Spezialfall in 1.4.1), die aus allen Permutationen einer Anordnung bestehen, zu einer einzigen Möglichkeit unseres Problems zusammen.

Daher: Bei unserem Problem gibt es $\frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}$ Möglichkeiten.

Schließlich noch: Es ist $\frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

(Kürze die Faktoren von $(n-m)!$ weg.) $\square$

Das Beispiel für die Lottospieler:

Im Lotto 6 aus 49 gibt es $\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$ verschiedene Tipp-Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp einen 6-er zu erzielen, ist also

$\frac{1}{1\,3\,9\,8\,3\,8\,1\,6} \approx 0{,}000\,000\,07\,8$

Definition: Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

Man schreibt $\binom{n}{m}$ (sprich “n über m”) für $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Die Zahlen $\binom{n}{m}$ heißen Binomialkoeffizienten (s. 1.4.5).

Der Vollstständigkeit halber definiert man noch:

$\binom{n}{0} := 1$, wenn $m = 0$ und $n = 0, 1, 2, ...$

Bemerke auch $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

Noch eine Interpretation von $\binom{n}{m}$:

Betrachte $\{1, 2, \ldots, n\} =: \underline{n}$. Zu jeder Menge von m Zahlen aus $\underline{n}$ gibt es genau eine Möglichkeit, sie der Größe nach anzuordnen. (So angeordnet werden uns z.B die Lottozahlen mitgeteilt.)

Aus dieser Überlegung ergibt sich folgende Interpretation von $\binom{n}{m}$:

$\binom{n}{m}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, Folgen von m verschiedenen und der Größe nach angeordneten Zahlen aus den Zahlen $1, 2, ..., n$ zu bilden (man spricht auch von “streng monoton wachsenden m-Folgen aus $\underline{n}$”).

1.4.4 Kombinationen mit Wiederholungen

Problem Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und es seien n verschiedene Objekte $a_1, a_2, ..., a_n$ betrachtet. Von jedem der a_j seien mindestens m identische Exemplare vorrätig.
Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, m Elemente aus dem Vorrat zu entnehmen (auf die Reihenfolge kommt es nicht an)?
("Kombinationen von n Elementen zur Klasse m mit Wiederholungen)

Tatsache: Die gesuchte Anzahl ist

$$\tilde{K}_{n,m} = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)(n+m-2)\cdots(n+1)n}{m,!} .$$

(Beweis mit vollständiger Induktion)

Beispiel: Das Dominospiel besteht aus Steinen, auf denen jeweils ein Paar von Zahlen aus $0, 1, ..., 6$ vermerkt sind (Paare mit zwei gleichen Zahlen erlaubt).
Hier ist $n = 7, m = 2$, und es gibt $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ verschiedene Dominosteine.

Eine weitere Interpretation von $\tilde{K}_{n,m}$:
$\tilde{K}_{n,m}$ ist die Anzahl der lexikographisch geordneten Folgen von m Zahlen aus $\{1, 2, .., n\}$, Wiederholungen zugelassen.
Im Falle $n = 3, m = 5$ sind das z.B. die Folgen

11111 11112 11113 11122 11123 11133 11222 11223 11233 11333 12222 12223 12233 12333 13333 22222 22223 22233 22333 23333 33333 .

Es sind $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$ Stück.

1.4.5 Binomischer Lehrsatz

Tatsache 1: Für $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m \geq 2$ gilt:

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

Wir geben zwei unterschiedliche Beweise.

(1) Formaler Beweis:

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}$$

$$\underset{\text{Hauptnenner}}{=} \frac{n!(n-m+1) + n! \cdot m}{m!(n-m+1)!} = \frac{n!(n-m+1+m)}{m!(n-m+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{m!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{(m!)(n-m+1)!} = \binom{n+1}{m}$$

(2) Inhaltlicher Beweis, mit Induktion (vgl. den Beweis der Tatsache 2 in 1.2.5):

Die m-elementigen Teilmengen einer $(n+1)$-elementigen Menge, etwa $M = \{1, \dots, n, n+1\}$, bestehen aus 2 Typen:

1. Typ: Die m-elementigen Teilmengen, die $n+1$ nicht enthalten.
Das sind die m-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ und davon gibt es $\binom{n}{m}$.

2. Typ: Die m-elementigen Teilmengen, die $n+1$ enthalten.
Sie erhält man, indem man zu den $(m-1)$-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ jeweils $n+1$ hinzufügt. Es sind also so viele, wie es $m-1$-elementige Teilmengen in $\{1, \dots, n\}$ gibt, also $\binom{n}{k-1}$ Stück.

Insgesamt ist demnach $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$. □

Aus dieser Tatsache ergibt sich das sogenannte **Pascalsche Dreieck**:

n	$\binom{n}{m}, m = 0, 1, 2, ..., n$
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
$\vdots$	$\dots$

Bidungsprinzip: Jede Nichteins im Dreieck ist die Summe der beiden Zahlen, die links und rechts darüberstehen.

Satz: (Binomischer Lehrsatz) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} b^m =$$

!

$$= a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{m} a^{n-m}b^m + ... + nab^{n-1} + b^n$$

Wieder geben wir zwei alternative Beweise:

1. Beweis: Formal durch Induktion:
Für $n = 0$ und $n = 1$ stimmt die Formel.
Sie sei für $n \geq 1$ als richtig vorausgesetzt. Dann gilt für $n + 1$;

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m}b^m)(a+b) \underset{\text{ausmultipliziert}}{=} a^{n+1} + ... + b^{n+1}.$$

Nach dem Ausmultiplizieren gibt es in dem gepunkteten Teil der entstehenden Summe für alle $m = 1, 2, ..., n$ genau zwei Summanden in denen der Faktor $a^{n+1-m}b^m$ auftritt, nämlich $\binom{n}{m} a^{n+1-m}b^m$ und $\binom{n}{m-1} a^{n+1-m}b^m$. Gemäß der Tatsache ist ihre Summe $(\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1})a^{n+1-m}b^m = \binom{n+1}{m} a^{n+1-m}b^m$. Somit ist $\binom{n+1}{m}$ der Koeffizient von $a^{n+1-m}b^m$ in der Formel für $(a+b)^{n+1}$, wie behauptet.

2. Beweis: Direkt durch Einsicht mittels 1.4.3 :
Beim völligen Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ erhält man als Summanden alle Produkte aus n Faktoren, wo alle Faktoren entweder a oder b sind und wo diese beiden Typen von Faktoren an allen möglichen Stellen stehen können. (Es gibt 2^n solche Summanden gemäß 1.4.2 .)
Ein solcher Summand ist nach entsprechender Umordnung der Faktoren gleich $a^{n-m}b^m$ genau dann, wenn genau m der möglichen n Faktorstellen durch b besetzt sind.
Also: Es gibt genau so viele Summanden des Typs $a^{n-m}b^m$ wie es Möglichkeiten gibt, in einer Folge von n Stellen m Stellen auszuwählen. Nach 1.4.3 ist diese Anzahl gleich $\binom{n}{m}$, wie behauptet. □

Tatsache 2

Für die Binomialkoeffizienten gelten noch folgende Regeln:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 1 + n + \binom{n}{2} = ... + \binom{n}{m} + ... + n + 1 = 2^n \quad ,$$

und für $n \geq 1$

$$\sum_{\substack{m=0 \\ m gerade}}^{n} \binom{n}{m} = \sum_{\substack{m=0 \\ m ungerade}}^{n} \binom{n}{m} = 2^{n-1}$$

Beweis: $2^n = (1+1)^n \overset{!}{=} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}$ nach dem binomischen Lehrsatz, und
$0 = (1-1)^n = 1 - n + \binom{n}{2} + ... + (-1)^m \binom{n}{m} + ... + (-1)^{n-1}n + (-1)^n.$ □

1.5 Aufgaben

Aufgabe 1. Bestimmen Sie folgende Mengen:

a) $\{1,3,5,7\} \cup \{2,4,6,8\}$ d) $[1,2] \cup [2,3]$ g) $\left[1, \frac{5}{2}\right] \cap \left]\frac{3}{2}, 3\right]$

b) $\{1,3,5,7\} \cap \{2,4,6,8\}$ e) $[1,2] \cup]2,3]$ h) $\left[1, \frac{5}{2}\right] \setminus \left[\frac{3}{2}, 3\right]$

c) $\{1,3,5,7\} \setminus \{2,4,6,8\}$ f) $[1,2[\cup]2,3]$ i) $\left[1, \frac{5}{2}\right] \setminus \left]\frac{3}{2}, 3\right]$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, welche der Ungleichung

$$\frac{1-|x-2|}{|x-3|} < \frac{1}{2}$$

genügen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen a und b stets kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel ist:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Aufgabe 4.

a) Geben Sie den Ausdruck $100 \pm 10\%$ als Intervall an.

b) Wenn ein Produkt incl. 16% MwSt. 100 EUR kostet, wie hoch ist dann der Netto-Preis?

Aufgabe 5. Im Land x gibt es Briefmarken von 5 Cent an aufwärts bis zu 99,95 EUR in Abständen von jeweils 5 Cent. Insgesamt gibt es also 1999 unterschiedliche Briefmarken. Wieviel Geld muß ein Sammler für deren Erwerb ausgeben?

Aufgabe 6. Ein Guthaben von $200\,000$ EUR soll als Rente ausgezahlt werden. Dazu wird das Guthaben festverzinst mit einem jährlichen Zinssatz von 8% angelegt, und es wird zum Ende jeden Jahres eine Rente R ausgezahlt.

a) Wie hoch fällt die jährliche Rente aus, wenn das Guthaben nach 20 Jahren aufgebraucht sein soll?

b) Wie muß man rechnen, wenn die Rente jeweils am Beginn des Jahres ausgezahlt werden soll?

Aufgabe 7.

a) In einer Stadt fielen im Jahr 2004 genau 100 Einheiten Müll an. Eine Statistik über die letzten 20 Jahre ergibt, dass die Müllproduktion jährlich um 5% wächst. Wieviel Müll wird nach dieser Statistik voraussichtlich im Jahr 2034 produziert?

b) Die Müllverbrennungsanlage der Stadt ist zur Zeit voll ausgelastet (d.h. sie verbrennt jährlich genau 100 Einheiten). Der in den nächsten Jahren anfallende überschüssige Müll soll auf einer neu anzulegenden Deponie gelagert werden. Wie groß ist die Deponie auszulegen, damit sie genug Kapazität für die nächsten 30 Jahre bereitstellt?

Aufgabe 8. Man berechne die Binomialkoeffizienten

$$\binom{5}{3},\ \binom{9}{4},\ \binom{3}{6},\ \binom{12}{5},\ \binom{24}{6},\ \binom{25}{23}$$

Aufgabe 9. Wieviele 6-stellige Telefonnummern können aus den Ziffern $0, \ldots, 9$ gebildet werden?

Aufgabe 10. Wieviele unterschiedliche Steine sind in einem Dominospiel, welches die Ziffern $0, \ldots, 9$ verwendet?

Aufgabe 11. Wieviele unterschiedliche Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden?

Aufgabe 12. Für eine Abstimmung (ja/nein) unter 10 Personen gibt es insgesamt 2^{10} mögliche Ergebnisse. Wieviele dieser Fälle würden ein positives Ergebnis liefern (d.h. in wievielen Fällen ist die Anzahl der ja-Stimmen größer als die Anzahl der Nein-Stimmen)?