Klausur zur Vorlesung Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler

Bitte lesbar ausfüllen, Zutreffendes ankreuzen

○ Herr ○ Frau

Name, Vorname: _____

Anschrift: _____

Geburtsdatum: _____

Studiengang: _____ Semester: _____

Matrikelnummer: _____ Platz-Nr.: _____

Hinweise:

- Tragen Sie auf dieser Seite Ihre persönlichen Daten und auf jedem der folgenden Blätter Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen ein. Blätter ohne Namen können nicht bewertet werden.
- Beginnen Sie Ihre Lösungen unter dem Aufgabentext und schreiben Sie gegebenenfalls auf die zugehörige Rückseite. Falls der Platz nicht ausreicht, befinden sich am Ende der Klausur zusätzliche leere Blätter. Soweit nötig, benutzen Sie für jede Aufgabe ein separates Zusatzblatt.
- Die Heftung darf nicht geöffnet werden.
- Stellen Sie den Lösungsweg ausführlich und begründet dar. Die Angabe eines Ergebnisses allein kann nicht mit Punkten honoriert werden.
- Folgende Hilfsmittel sind zugelassen: Das Vorlesungsskript, ein weiteres Buch, sowie ein nicht-programmierbarer, nicht-graphikfähiger Taschenrechner.
- Es sind maximal 120 Punkte erreichbar. Sicher bestanden ist die Klausur ab 50 Punkten.
- Bearbeitungszeit: 240 Minuten

— Bewertung —

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
erzielte Punkte	/10	/12	/9	/12	/10	/9	/10	/8	/10	/10	/10	/10	/120

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 1 Punkte: / 10

a) Von 5 000 Personen sprechen 2 893 Englisch, 2 453 Deutsch, und 536 weder Deutsch noch Englisch. Wieviele Personen sprechen sowohl Englisch als auch Deutsch?
b) Berechnen Sie $\binom{100}{98}$.
c) Wieviele verschiedene Initialen sind bei genau einem Vor– und einem Nachnamen möglich? (Initialen sind die jeweils ersten Buchstaben von Vor– und Nachnamen. Dabei werden hier Umlaute nicht unterschieden, d.h. es gibt 26 verschiedene Buchstaben.)
d) In einer Stadt mit 20 000 Einwohnern haben keine zwei Personen die gleichen Initialen. Allerdings haben einige der Einwohner zwei, oder sogar drei Vornamen (jedoch nicht mehr). Mindestens wieviele Personen haben dann drei Vornamen?

Antwort:

a)	b)	c)	d)

Begründung:

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 2 Punkte: / 12

Wie lauten die Elastizität bzw. die beiden partiellen Elastizitäten der folgenden reellwertigen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{2}\cdot x}{x^2-4}$ b) $g(x,y) = cos(x+2\ln(y))$

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale (beim ersten Integral sei $a \in \mathbb{R}$):

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (4x^2 - \frac{a}{\sqrt{x}})\, dx$ d) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+3}\, dx$ e) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\, dx$

Tragen Sie die richtige Antwort ein:

a)	b)	
c)	d)	e)

Rechnungen:

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 3 Punkte: / 9

Modellieren Sie eine Nachfragefunktion mit folgenden Eigenschaften durch ein quadratisches Polynom $N : [0, 10] \to \mathbb{R}$:

$$N(0) = 10$$
$$N(1) = 12$$
$$N(x) \text{ hat eine Nullstelle bei } x = 10.$$

Antwort:

$N(x) =$ .....

Lösung:

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 4 Punkte: / 12

Man untersuche die Funktion
$$f(x) = x + \frac{1}{3x-3} - 1$$
auf Grenzwerte, Polstellen, Nullstellen, lokale Extrema sowie Wendepunkte und skizziere ihren Verlauf (auf der folgender Seite ist ein Koordinatensystem vorgedruckt).

Antwort:

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ..... $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ .....

Polstelle(n):

x_i:	$\lim\limits_{x\to x_i^-} f(x)$:	$\lim\limits_{x\to x_i^+} f(x)$:

Nullstelle(n): .....

Extrema:

x_i:	$f(x_i)$:	Min/Max:

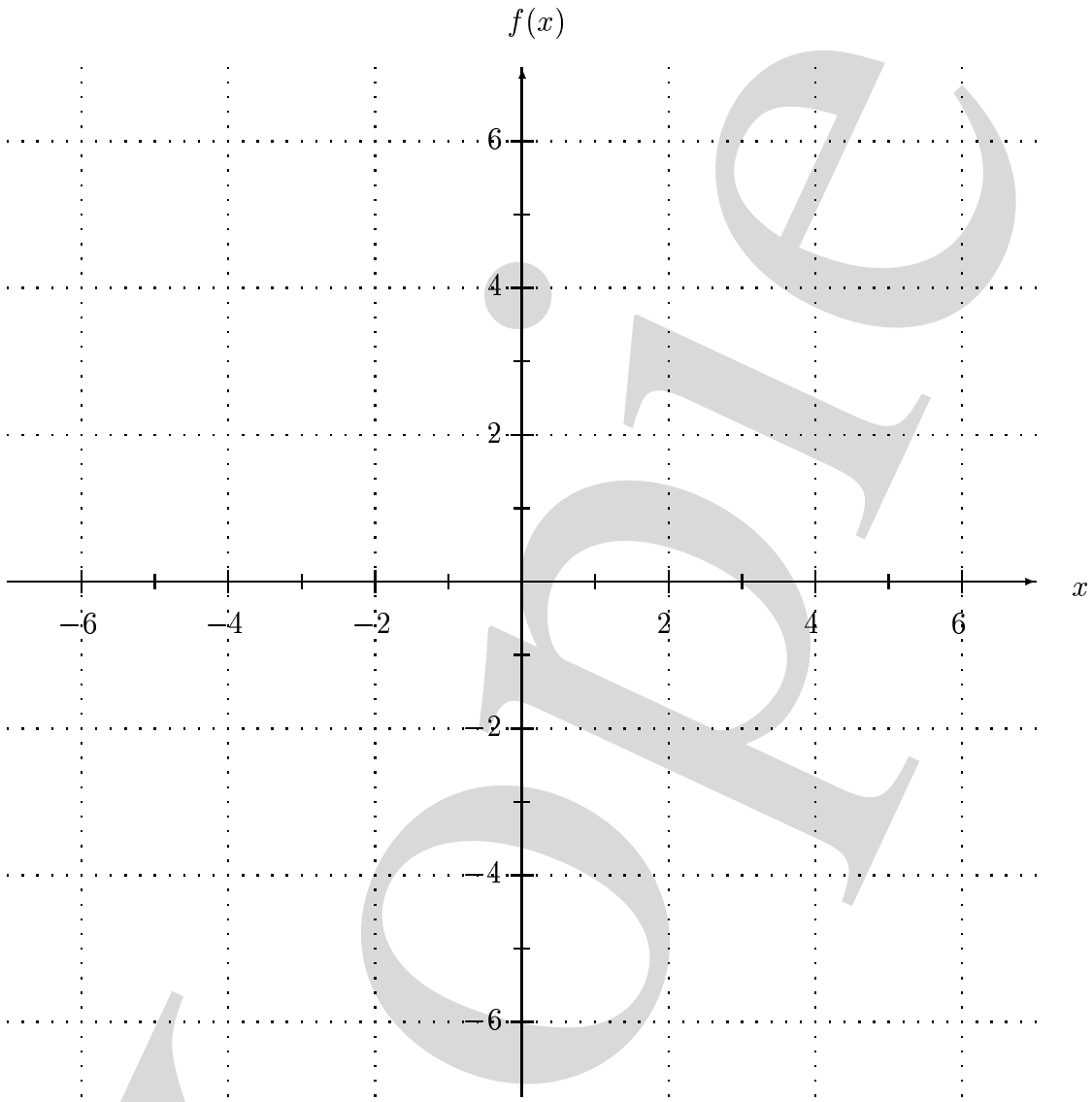
Wendepunkt(e): .....

Rechnungen:

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Zeichnung zu Aufgabe 4:



Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 5 Punkte: / 10

Ein Imker verkauft seinen Honig am Wochenendmarkt zum Preis von 4 EUR pro Glas. Seine eigenen Kosten veranschlagt er mit 2 EUR pro Glas. An vier Wochenenden verkauft er 160 Gläser. Aus Erfahrung weiß der Imker, dass sich der Absatz von vier Wochenenden bei einer Preiserhöhung von 50 Cent pro Glas um 10 Gläser mindert, bei einer Preiserhöhung von 1 EUR pro Glas um 20 Gläser, usw. (D.h. er nimmt an, dass ein linearer Zusammenhang zwischen Preis und Umsatz besteht).

Bei welchem Preis ist unter dieser Annahme der maximale Gewinn zu erwarten?

Antwort:

Der Imker kann maximalen Gewinn bei einem Preis von ..... EUR pro Glas erwarten. Der Gewinn beträgt dann ..... EUR.

Lösung:

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 6 Punkte: / 9

Sind folgende Matrizen invertierbar? Wenn ja, geben Sie jeweils die inverse Matrix an:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Antwort:

- ◯ Die Matrix A ist nicht invertierbar.
- ◯ Die Matrix A ist invertierbar, es ist

$A^{-1} =$.

- ◯ Die Matrix B ist nicht invertierbar.
- ◯ Die Matrix B ist invertierbar, es ist

$B^{-1} =$.

Rechnungen:

Korrektur

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 7 Punkte: / 10

a) Bringen Sie für folgendes Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des Gaußalgorithmus die erweiterte Koeffizientenmatrix auf normierte Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist ein (anderes) Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar, wenn Sie im Laufe des Gaußalgorithmus auf folgende erweiterte Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{b})$ stoßen:

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 3 \end{array}\right).$$

c) Geben Sie für die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\tilde{A}|\tilde{b})$ aus b) für den Fall $a = 1$ den Lösungsraum an.

Antwort:

a)

$(\tilde{A}|\tilde{b}) =$

b) Für ..... ist das Gleichungssystem lösbar.

c)

$L =$

Rechnungen:

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 8 Punkte: / 8

Berechnen Sie die Determinante folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Antwort:

$$\det(A) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Rechnung:

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 9 Punkte: / 10

Edith bekommt von ihrer Tante 2,— EUR mit dem Bemerken geschenkt, dass sie über den Geldbetrag frei verfügen kann. Sie will sich Süßigkeiten dafür kaufen, und da gerade Regenwetter ist, nimmt sie ihr Täschchen mit, das genau 240 cm^3 fasst. Beim Kaufmann findet sie zwei Sorten Bonbons in den Größen 3 cm^3 und 4 cm^3. Ein Bonbon der ersten Sorte kostet 2 Cent, ein Bonbon der zweiten Sorte 5 Cent. Da Edith die zweite Sorte noch nicht kennt, möchte sie davon mindestens 3 Stück probieren. Wieviel kann sie von jeder Sorte kaufen? (d.h. *Zeichnen Sie den zulässiger Bereich D in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.*)

Wieviel Stück kauft sie von jeder Sorte am vorteilhaftesten ein, wenn sie mit den Süßigkeiten möglichst lange auskommen will, und wenn die "Lutschzeit" für die erste Sorte 8 Minuten pro Stück und für die zweite 9 Minuten pro Stück beträgt? (d.h. *Bestimmen Sie graphisch den Optimalpunkt auf D.* ***Berechnen*** *Sie dann die exakten Koordinaten des Optimalpunktes als Schnittpunkt zweier Geraden.*)

Wie hoch ist dann die optimale "Lutschzeit"?

Antwort:

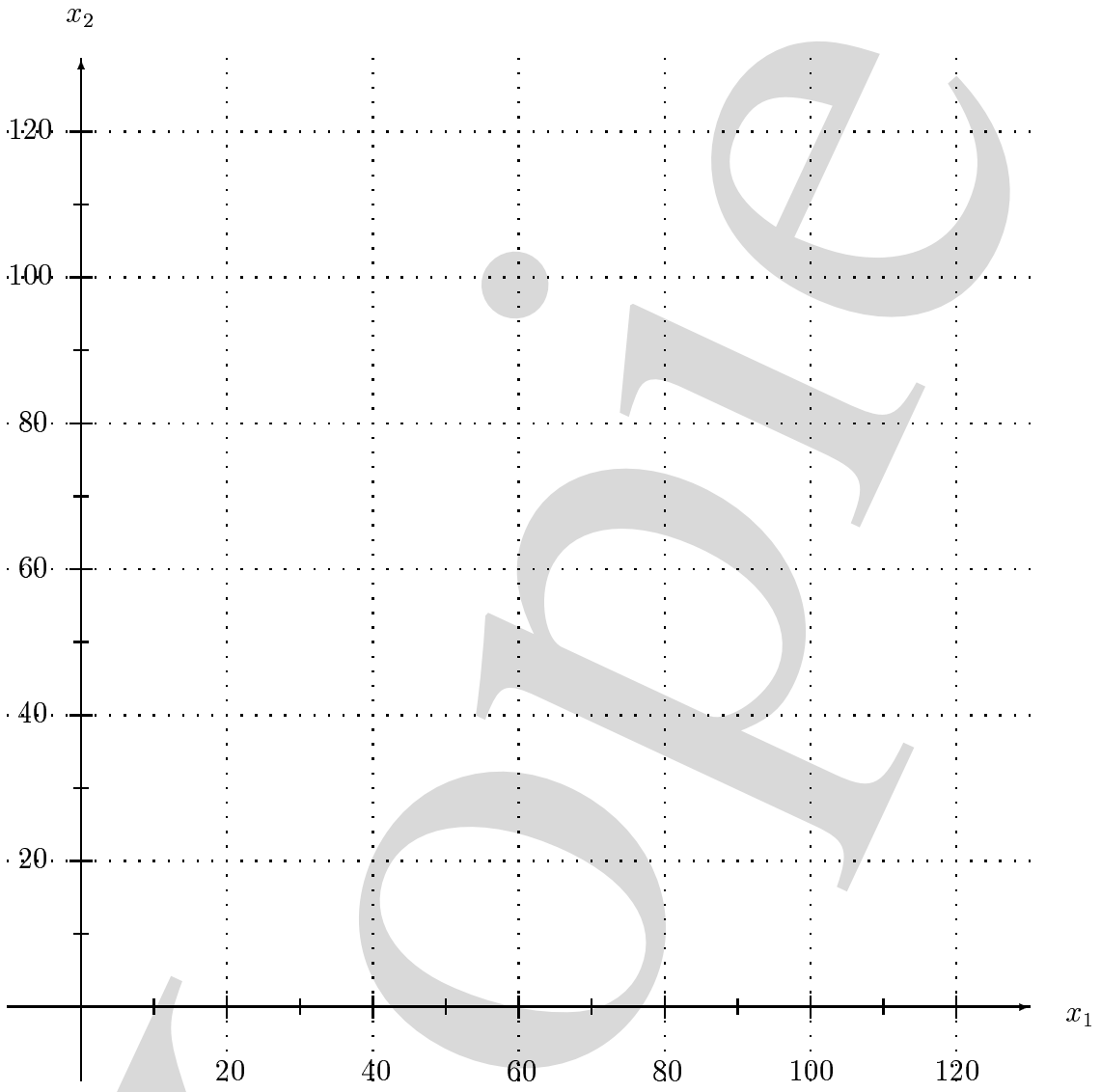
Edith kauft am besten $x_1 =$ ..... Bonbons der ersten Sorte und $x_2 =$ ..... Bonbons der zweiten Sorte. Sie erhält dadurch eine Lutschzeit von ..... Minuten.

Lösung:

Korrektur

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Zeichnung zu Aufgabe 9:



Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 10 Punkte: / 10

a) Stellen Sie für folgendes Optimierungsproblem das Anfangstableau des Simplex-Algorithmus auf:

$$\text{Maximiere } 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & \leq & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 45 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & \leq & 100 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array},$$

Antwort:

Folgende Tableaux sind aus Simplex-Algorithmen zur Optimierung von Standard-Maximum Problemen entnommen. Entscheiden Sie jeweils, was der nächste Schritt ist: (D.h. geben Sie entweder eine neue Pivot-Spalte und Pivot-Zeile an, oder lesen Sie eine optimale Lösung samt Optimum der Zielfunktion ab, bzw. interpretieren Sie die aufgetretene Situation anderweitig.)

Antwort:

b)

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	w	q
12	0	1	7	0	60	
−5	1	0	−3	0	10	
2	0	0	7	1	20	
3	0	0	−2	0	−20	

c)

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	w	q
1	−1	0	0	7	10	
0	−5	0	1	−3	0	
0	0	1	0	7	17	
0	1	0	0	−2	−99	

d)

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	w	q
20	0	7	0	1	10	
−3	1	−3	0	0	5	
10	0	7	1	0	20	
−9	0	−2	0	0	−10	

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 11 Punkte: / 10

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) := \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}y^2 - xy + 3y$$

(für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) auf Extremwerte.

Antwort:

Folgende Punkte (x,y) sind lokale Maxima: .....

Folgende Punkte (x,y) sind lokale Minima: .....

Lösung:

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

Aufgabe 12 Punkte: / 10

Bestimmen Sie mögliche Extrema der Funktion

$$x^2 - 2y^2 + xy - y$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y = 1$$

Antwort:

Folgende Punkte (x, y) sind mögliche Extrema von f unter der angegebenen Nebenbedingung: .....

Lösung:

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

◯ **Fortsetzung von Aufgabe: ..... .** Zusatz-Blatt

◯ **Hilfsüberlegungen, bitte nicht bewerten.**

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

◯ **Fortsetzung von Aufgabe: ..... .** Zusatz-Blatt

◯ **Hilfsüberlegungen, bitte nicht bewerten.**

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

◯ **Fortsetzung von Aufgabe: ..... .** Zusatz-Blatt

◯ **Hilfsüberlegungen, bitte nicht bewerten.**

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

◯ **Fortsetzung von Aufgabe: ..... .** Zusatz-Blatt

◯ **Hilfsüberlegungen, bitte nicht bewerten.**

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

◯ **Fortsetzung von Aufgabe: ..... .** Zusatz-Blatt

◯ **Hilfsüberlegungen, bitte nicht bewerten.**

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

◯ **Fortsetzung von Aufgabe: ..... .** Zusatz-Blatt

◯ **Hilfsüberlegungen, bitte nicht bewerten.**

Kopie

Matr.Nr.: ..... Name: .....

◯ **Fortsetzung von Aufgabe: ..... .** Zusatz-Blatt

◯ **Hilfsüberlegungen, bitte nicht bewerten.**

Kopie