Klausur: Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler	WS 2003/04	Platz-Nr.:	Studienfach:
NAME:			Matrikel-Nr.:
ANSCHRIFT:			Semesterzahl:

Klausur zu Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler

Vorlesungszeitraum:	WS 2003/04
Datum:	19.02.2004
Bearbeitungszeit:	240 Minuten
Hilfsmittel:	keine
Bewertung:	Achten Sie bitte sorgfältigst auf die genaue Aufgabenstellung. Für Ergebnisse allein gibt es keine Punkte!
Wichtiger Hinweis:	Halten Sie sich bei der Beantwortung der Fragen an den im Rahmen der jeweiligen Aufgaben zur Verfügung gestellten Raum (incl. der Rückseiten der Blätter, auf denen die jeweiligen Aufgaben gedruckt sind). **Antworten an anderer Stelle werden nicht gewertet.** Der Platz ist ausreichend bemessen. Für Hilfsüberlegungen, die nicht in die Bewertung eingehen, stehen Ihnen die letzten Blätter zur Verfügung.
Umfang:	Diese Klausur besteht aus 17 Seiten. Die Heftung darf nicht geöffnet werden.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
erreichte Punkte	8	5	8	5	6	8	12	4	8

Aufgabe	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
erreichte Punkte	7	9	6	12	4	7	11	120

1. (5+3 Punkte) Sind folgende Mengen von Vektoren linear unabhängig und bilden sie eine Basis des zugehörigen $\mathbb{R}^n$?

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ \ln(4) \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2. (5 Punkte) Bilden Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

3. (8 Punkte) Berechnen Sie, falls möglich, die Produkte folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4. (5 Punkte) Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Prüfen Sie, ob x oder y in einer ε-Umgebung von z liegen für $\varepsilon = 3$.

5. (6 Punkte) Gegeben Sei das Endtableau eines Gaußalgorithmus.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{2}$$

Geben Sie folgende Größen an:

(a) Dimension des Lösungsraumes

(b) eine spezielle Lösung

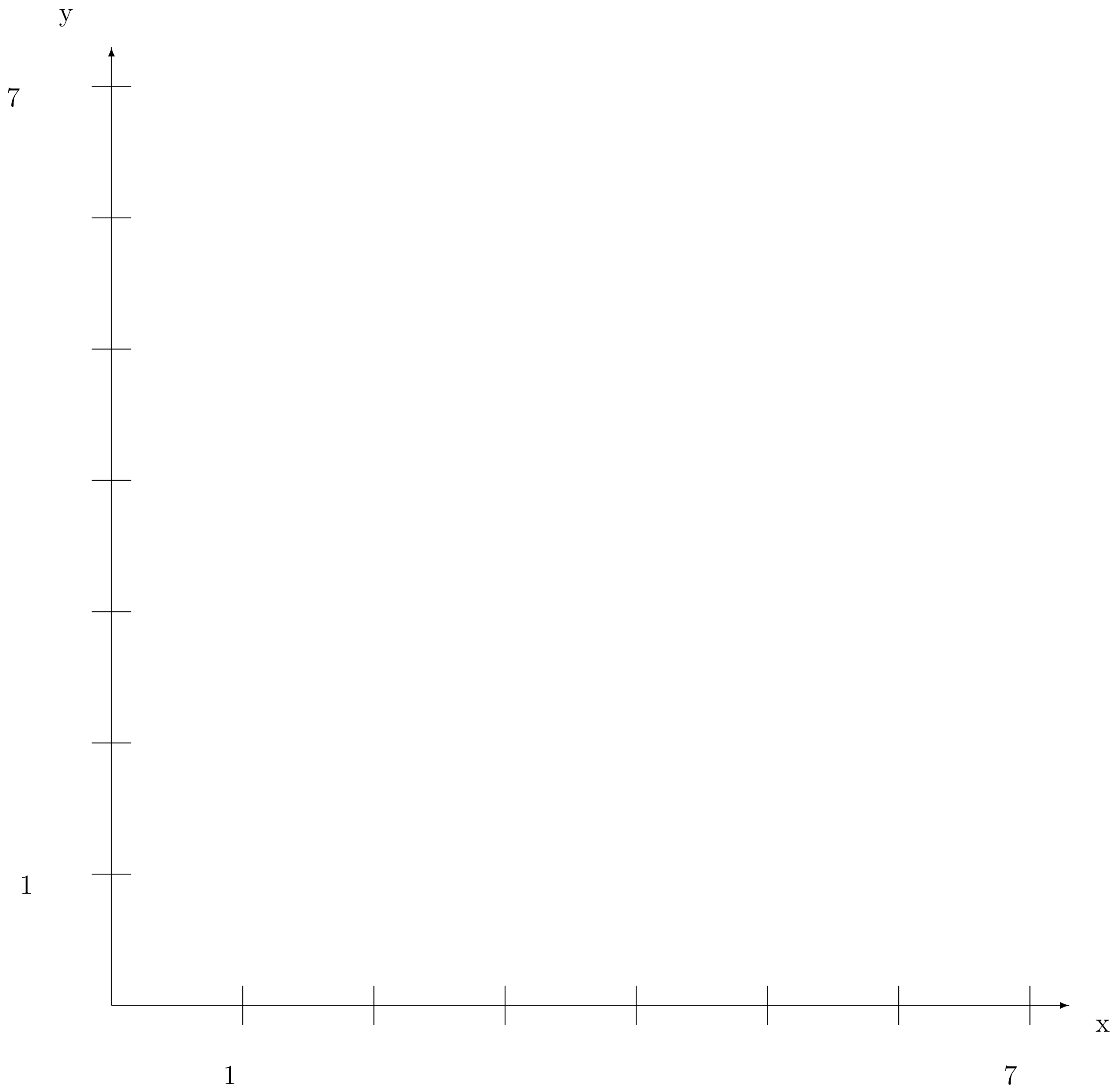
(c) Lösungsgesamtheit

(d) Befindet sich der Punkt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ in der Lösungsmenge.

6. (8 Punkte) Lösen Sie das nachfolgende Problem graphisch in einem geeigneten Koordinatensystem! Zwei Fachkräfte sind für die Produktion von vier verschiedenen Bauteilen verantwortlich. Es müssen täglich mindestens mindestens eine Einheit von Bauteil 1, 4 Einheiten von Bauteil 2, 10 Einheiten von Bauteil 3 und 12 Einheiten von Bauteil 4 zusammengebaut werden, da diese für die weitere Fertigung benötigt werden. Da die Fachkräfte aus einer Leiharbeitsfirma stammen und nur temporär in dieser Produktionslinie eingesetzt werden, soll die Produktion zu möglichst geringen Personalkosten erfolgen. Der dem Unternehmen in Rechnung gestellte Stundenlohn beträgt für Fachkraft 1 20 EURO und für Fachkraft 2 40 EURO. Dabei müssen folgende Restriktion berücksichtigt werden: Die maximale Beschäftigungsdauer je Tag liegt bei 6 Stunden für jede Fachkraft. Die Stückzahlen, die auf einmal je Zeiteinheit gefertigt werden können, gehen aus folgender Tabelle hervor:

	Bauteil 1	Bauteil 2	Bauteil 3	Bauteil 4
Fachkraft 1	0	1	5	4
Fachkraft 2	3	2	2	3

d.h. Fachkraft 1 kann in einer Stunde eine Einheit von Bauteil 2 und je 4 Einheiten von den Bauteilen 3 und 4 herstellen. Wie lautet das kostenminimale Produktionsprogramm? Fertigen Sie eine graphische Lösung unter Verwendung des gegebenen Koordinatensystems an, ohne dessen Skalierung zu ändern! (7 Einheiten auf jeder Achse)


y
7
1
x
1
7

7. (2+1+3+3+3 Punkte) Wir schreiben das Jahr 1950. Sie als Produktionsleiter eines Automobilunternehmens haben die Aufgabe die Produktionsplanung — diese stellt in dieser Zeit den typischen Engpass dar — für den kommenden Monat zu optimieren. Es werden vier Autos hergestellt: Limousinen, Kombis, Sportwagen und Cabrios. Die Montagehalle hat 12 Stationen, auf denen jede der vier Autosorten gefertigt werden kann. Die Fertigung von Limousinen und Kombis dauert auf einer Plattform je einen Tag, die Fertigung eines Sportwagens oder Cabrios 2 Tage. Ein Monat hat 25 Arbeitstage. Die Endkontrolle wird von Spezialisten durchgeführt, die für 500 Arbeitsstunden im Monat zur Verfügung stehen. Sie dauert bei Limousinen 1, bei Kombis 2, bei Sportwagen 4 und bei Cabrios 4 Stunden. Die Lagerkapazität liegt bei 200 PKW. Das Lager ist momentan leer und wird erst am Monatsende wieder geleert.

   (a) Stellen Sie die Restriktionen in Form von Ungleichungen dar!

   (b) Wie hoch sind die Gesamtkosten, wenn der Produktionskosten je Limousine \$ 3000, je Kombi \$ 4000, je Sportwagen \$6000 und je Cabrio \$ 8000 betragen?

   (c) Erstellen Sie mit diesen Angaben das Starttableau für den dualen Simplexalgorithmus.

(d) Führen Sie die **erste** Umformung (bis zum ersten Basiswechsel) durch! Rechnen Sie den Simplex **nicht** bis zum Ende durch!

(e) Wenn der duale Simplex bis zum Ende durchgerechnet worden ist, wo und wie können Sie die Lösung und gegebenenfalls die nicht ausgeschöpften Restriktionen ablesen?

8. (2+2 Punkte) Konvergieren folgende Folgen? Ermitteln Sie gegebenenfalls den Grenzwert!

(a) $a_n = \frac{4n^4 - 3n - n^5}{2n - n^6}$

(b) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

9. (3+5 Punkte)Bestimmen Sie den Wert der folgenden Summe und ermitteln Sie den Grenzwert für $n \to \infty$, falls dieser existiert.

   (a) $\sum_{r=0}^{n} \frac{3}{4} 3^r \cdot 4^{-r+1}$

   (b) Sind folgende Aussage richtig oder falsch? Der Ausdruck "Konvergenz" bezieht sich in dieser Aufgabe ausschließlich auf die Konvergenz gegen eine reelle Zahl. Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen (nicht unter Null). Nicht beantwortete Fragen geben keinen Punkt.

      i. $\sum_{i=1}^{M} a_i$ konvergiert für $M \to \infty$, dann muss a_i gegen 0 konvergieren für $i \to \infty$.

      ii. Die Folge a_i ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann muss sie konvergieren.

      iii. Die Folge a_i ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann muss sie konvergieren.

      iv. Die Folge a_i konvergiert gegen 0 für $i \to \infty$, dann muss $\sum_{i=1}^{M} a_i$ konvergieren für $M \to \infty$.

      v. Die Folge a_i konvergiert und die Folge b_i ebenfalls. Dann muss auch $a_i \cdot b_i$ konvergieren.

10. (1+2+1+3 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, reelle Funktion. Was bedeutet anschaulich die Elastizität $\epsilon_f(x)$ der Funktion f an der Stelle x?

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Was bedeuten anschaulich die Skalenelastizität ϵ_λ und was die partiellen Elastizitäten ϵ_{x_i} der Funktion f an der Stelle $x = (x_1, ..., x_n)$?

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, reelle Funktion. Was bedeutet anschaulich die Ableitung $f'(x)$ der Funktion f an der Stelle x?

(d) Berechnen Sie die Skalenelastizität ($\epsilon_\lambda = \frac{df(\lambda x,\lambda y,\lambda z)}{d\lambda}\frac{\lambda}{f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)}$) bezüglich der Skala λ der Produktionsfunktion

$$f(x, y, z) = \frac{x^\alpha y^{2\alpha-1} + z^{3\alpha-1}}{xyz}. \tag{3}$$

Hinweis: Vereinfachen Sie zunächst für $\lambda \in \mathbb{R}_+$ den Ausdruck

$$\frac{f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{f(x, y, z)}.$$

11. (9 Punkte) Diskutieren Sie (Nullstellen, Monotoniebereiche und Extrema) die Funktion: $f(x) = \exp(2x^2 + 1)(x-1)^2(x+\frac{1}{2})$. Wie viele Wendepunkte hat f mindestens? (Eine Berechnung der zweiten Ableitung ist nicht nötig!) Geben Sie – falls f Ihrer Meinung nach einen Wendepunkt besitzt – einen Bereich an, in dem ein Wendepunkt liegen muss. Hinweis: $(x-1)$ ist ein Faktor der ersten Ableitung von f.

12. (2+2+1+1 Punkte) Bestimmen Sie:

(a) $\frac{d}{dx} x \ln\left(x^2\right)$

(b) $\frac{d}{dy} \frac{e^y}{y}$

(c) $\frac{d}{da}\left(a^2 + 3a + a^{-2}\right)$

(d) $\frac{d}{dz}\left(\frac{2}{z}\right)$

13. (4+3+2+3 Punkte) Bestimmen Sie:

(a) $\int\limits_1^e x \ln(x^2)\, dx$, Hinweis: Substitution und $\int \ln(x)\, dx = x(\ln(x) - 1)$oder partielle Substitution

(b) $\int 2xe^x dx$, Hinweis: partielle Substitution

(c) $\int (a^2 + 3a + a^{-2})\, da$

(d) $\int_1^e z^{-1} dz$

14. (2+2 Punkte)Erläutern Sie anschaulich die Bedeutung der Begriffe

(a) Gradient $\nabla f(x, y)$ einer reellen Funktion $f(x, y)$ mit mehreren Variablen

(b) Niveaulinie $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$ einer stetigen reellen Funktion mit mehreren Variablen

15. (7 Punkte) Geben Sie den Punkt auf der Ebene $E = \{(x, y, z) : x + 2y + 2z = 10\}$ an, der den kleinsten Abstand zum Punkt $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat. D.h. minimieren Sie die Abstandsfunktion $f_a \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = (x-1)^2 + y^2 + z^2$ unter der durch E gegebenen Nebenbedingung.

16. (11 Punkte) Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2xy^2 - 2y^2$$