2001 **number 1**

ISSN 1433-2817

manuscripts in mathematical and in

m_match

computer chemistry

H. Dolhaine:

Einige Ergebnisse der Gruppentheorie

1974, zweite, überarbeitete Fassung 1991

Dritte Überarbeitung im Juni 2000

Published by: A. Kerber, Dep. of Mathematics, Univ. of Bayreuth, D-95440 Bayreuth,

Germany, Managing Editor of MATCH

Das vorliegende Skript ist aus einer Reihe von Seminarveranstaltungen Mitte der siebziger Jahre am Chemischen Institut der Universität Düsseldorf entstanden. Es ging darum, Studenten nach dem Vordiplom die Anwendung gruppen-, genauer darstellungstheoretischer Methoden in der Spektroskopie, vor allem der NMR-Spektroskopie nahe zu bringen. Dazu existiert bereits eine Fülle einschlägiger Literatur. Warum also so ein Skript? Auffällig ist, dass in den mehr chemisch orientierten Texten zwar der Begriff der Gruppe erläutert und auch kurz auf den Begriff der Darstellungen eingegangen wird, das wichtige Grosse Orthogonalitätstheorem und die Zerlegung von Darstellungsräumen in invariante Unterräume aber allenfalls an Beispielen gezeigt wird. Der Lernende wird somit zu einer nachahmenden Handlungsweise ohne tieferes Verständnis angeleitet. Andererseits finden sich tiefer gehende Erläuterungen zur Darstellungstheorie und auch Beweise zum Grossen Orthogonalitätstheorem vorzugsweise in Büchern, die den Praktiker wegen ihres hohen mathematischen Niveaus abschrecken und die daher eher selten gelesen werden. Ziel des Seminars und damit dieses Skriptes war und ist, die verstreut vorliegenden Informationen zusammenzufassen und in kurzer Form einen Bogen vom Gruppenbegriff zur Zerlegung von Räumen nach Symmetrietypen mit allen Beweisen zu schlagen. Damit werden die in der Spektroskopie und anderswo zugrundeliegenden Verfahren nachvollziehbar auf eine theoretische Grundlage gestellt und ach von der Norm abweichende Fragestellungen beherrschbar.

Zeichenerklärung

$\{ \}$: Mengenklammer

$a \in B$: a ist Element von B

$\vee$: logisches "oder"

$\wedge$: logisches "und"

$\cup$: Vereinigung; $A = \{ a_i \}, B = \{ b_j \} : A \cup B = \{ c_k. \mid c_k \in A \vee c_k \in B \}$

$\cap$: Durchschnitt; $A = \{ a_i \}, B = \{ b_j \} : A \cap B = \{ c_k \mid c_k \in A \wedge c_k \in B \}$

δ_{ik} : Kronecker-Symbol. $\delta_{ik} = 1$ für i=k, 0 sonst

<> : ungleich

Σ_i : Summe über i

$\Sigma_{\mathbf{G}}$: Summe über die Elemente der Menge **G**

Literatur

Mathiak/Stingl, Gruppentheorie, Akademische Verlagsgesellschaft,
Frankfurt 1969

H. Boerner, Darstellungen von Gruppen, Springer Verlag,
Berlin 1967

D.M. Bishop, Group Theory and Chemistry, Clarendon Press,
Oxford 1973

G. J. Ljubarski, Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik, Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1962

W.Ludwig, C. Falter, Symmetries in Physics, Springer Series in Solid State Physics
Berlin 1996

I) Allgemeine Gruppentheorie

Definition 1:

Eine Menge **G** = $\{ g_1, g_2, .., g_i, ...\}$ heißt Gruppe, wenn eine Abbildung o von **G**×**G** nach **G** gegeben ist mit den Eigenschaften

1.1) diese Verknüpfung ist assoziativ:

$$g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k = g_i \circ g_j \circ g_k$$

1.2) es gibt ein $e \in$ **G**, so daß für alle g_i gilt

$$e \circ g_i = g_i \circ e = g_i$$

1.3) für jedes g_i gibt es ein g_i^{-1} mit

$$g_i^{-1} \circ g_i = g_i \circ g_i^{-1} = e$$

erklärt ist. Die Anzahl der Elemente von **G** heißt Gruppenordnung. Gilt für alle i und j

$$g_i \circ g_j = g_j \circ g_i \qquad ,$$

dann heißt die Gruppe "abelsch" bzw. "kommutativ". Da auf **G** nur die eine Verknüpfung o definiert ist, kann man schreiben

$$g_i \circ g_k = g_i \, g_k \ .$$

SATZ 1

In jeder Gruppe **G** gibt es genau ein Einheitselement e.

Beweis:

Sei neben e auch E Einheitselement. Dann gilt nach 1.2)

$$g_i\, e = g_i = g_i\, E \quad ,$$

also

$$g_i^{-1}\, g_i\, e = e\, e = e = g_i^{-1}\, g_i\, E = e\, E = E$$

und damit

$$e = E \quad .$$

w.z.b.w.

SATZ 2

Zu jedem Element g_j einer Gruppe existiert genau ein Inverses.

Beweis:

Seien a, b verschiedene Inverse zu g_j; daraus folgt mit 1.3)

$$a\, g_j = b\, g_j = e$$

bzw.

$$a = b$$

w.z.b.w.

Definition 2:

Alle Teilmengen von **G**, für die 1.1) bis 1.3) erfüllt sind, heißen Untergruppen von **G**.
(Sogenannte triviale Untergruppen sind **G** selbst und { e })

Beispiele:

a) Die Menge der ganzen Zahlen bildet bezüglich der Addition eine Gruppe. Einheitselement ist 0, Inverses zu g ist - g!

b) Die Menge der reellen Zahlen bildet für beliebiges ungerades n <> 0 eine Gruppe, wenn man

$$a \circ b = (a^n + b^n)^{1/n}$$

setzt, denn

$$a \circ (b \circ c) = (a^n + [(b^n + c^n)^{1/n}]^n)^{1/n} = (a^n + b^n + c^n)^{1/n}$$

und

$$(a \circ b) \circ c = ([(a^n + b^n)^{1/n}]^n + c^n)^{1/n} = (a^n + b^n + c^n)^{1/n} \quad ,$$

also

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Einheitselement ist 0, da $0 \circ a = (0^n + a^n)^{1/n} = a$

Inverses von a ist -a, da $(-a) \circ a = ((-a)^n + a^n)^{1/n} = 0$

c) Die Menge { 1 } bildet bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.

d) Die Menge { W,F } der Aussagenlogik bildet bezüglich der Verknüpfung XOR (ausschließendes oder) eine Gruppe. Seien A und B Aussagen mit dem Wahrheitsgehalt W oder F, dann gilt die Tafel

A	B	A XOR B
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Das Einheitselement ist offensichtlich F, das Inverse zu W ist W.

Nachweis des Assoziationsgesetzes 1.1)

$$W \circ (W \circ W) = W \circ F = W; \quad (W \circ W) \circ W = F \circ W = W$$
$$W \circ (W \circ F) = W \circ W = F; \quad (W \circ W) \circ F = F \circ F = F$$
$$F \circ (W \circ F) = F \circ W = W; \quad (F \circ W) \circ F = W \circ F = W$$
$$F \circ (F \circ F) = F \circ F = F; \quad (F \circ F) \circ F = F \circ F = F$$

usw.

W,F bildet bezüglich v (normales oder) keine Gruppe.

SATZ 3

Die Ordnung einer Untergruppe $\mathbf{U} = \{ u_i \}$ zur Gruppe **G** ist Teiler der Gruppenordnung.

Beweis:

Sei a **U** die Menge aller Elemente aus **G**, die sich für beliebiges $a \in \mathbf{G}$ in der Form a u_i schreiben lassen. Offensichtlich enthält a **U** die gleiche Zahl von Elementen wie **U**.
(a **U** heißt auch Linksnebenklasse von **G** nach **U** zum Element a, entsprechend **U** a Rechtsnebenklasse).

1) Sei $a \in \mathbf{U}$, dann ist $a\mathbf{U} = \mathbf{U}$

2) Zwei Mengen a **U**, b **U** sind dann gleich, wenn $a^{-1} b \in \mathbf{U}$, gilt nämlich $a^{-1} b \in \mathbf{U}$, dann ist $a^{-1} b\, \mathbf{U} = \mathbf{U}$ und damit

$$b\,\mathbf{U} = a\, a^{-1} b\, \mathbf{U} = a\,\mathbf{U}.$$

Umgekehrt folgt aus a **U** = b **U** durch Linksmultiplikation mit dem Inversen von a die Gleichung $\mathbf{U} = a^{-1} b\, \mathbf{U}$, also $a^{-1} b \in \mathbf{U}$.

3) Zwei verschiedene Mengen a **U**, b **U** haben kein Element gemeinsam.
Wäre nämlich c Element beider Mengen, so folgte

$$c = a\, u_i = b\, u_k$$

bzw.

$$a^{-1}\, b \;=\; u_i\, u_k^{-1} \in \mathbf{U} \quad ,$$

also $$a\,\mathbf{U} \;=\; b\,\mathbf{U} \quad ;$$

Widerspruch!

Damit läßt sich die Gruppe G in eine Anzahl von K Mengen einteilen, die kein Element gemeinsam, aber jeweils gleichviele Elemente wie **U** haben.Es ist also

$$\text{Ord}\ \mathbf{G} = K\ \text{Ord}\ \mathbf{U},\ K \in N$$

w.z.b.w.

Definition 3:

Die Potenzen eines Elements g_i aus **G** verstehen sich wie bei den reellen Zahlen, insbesondere

$$g_i^0 = e, \quad g_i^m \;=\; \underbrace{g_i\, g_i\, g_i....g_i}_{\text{m-mal}} \;.$$

Sei **G** eine Gruppe mit Ord **G** = n. Die Potenzen g_i^m, m = 1,2,.. von $g_i \in$ **G** bilden eine Untergruppe **U**(g_i) von **G**.
Wegen der Endlichkeit von **G** muß es eine kleinste natürliche Zahl M <> 0 geben, so daß

$$g_i^M \;=\; e \;.$$

M heißt "Ordnung von g " und ist gleichzeitig Ord **U**(g_i).

Damit kann man schreiben

$$n = K\,M \quad .$$

Ist n nun Primzahl, so folgt wegen M > 1 die Aussage M = n, also

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}(g_i).$$

Da die Potenzen von g_i kommutieren, haben wir den

SATZ 4
Jede Gruppe, deren Ordnung n eine Primzahl ist, ist abelsch.

Definition 4:

Die Menge $\mathbf{Z} = \{ z_j \in \mathbf{G} \mid \text{für alle } b \in \mathbf{G}: z_j b = b z_j \}$ heißt Zentrum von **G. Z** ist offensichtlich eine Untergruppe von **G**, denn

1) $z_i(z_j z_k) = (z_i z_j) z_k$, weil die $z_i \in \mathbf{G}$

2) $z_i z_j \in \mathbf{Z}$, denn $z_i z_j b = z_i b z_j = b z_i z_j$, also führt

die Gruppenverknüpfung wieder in **Z** hinein.

3) aus $z_i \in \mathbf{Z}$ folgt $z_i^{-1} \in \mathbf{Z}$, denn $z_i^{-1} b = (b^{-1} z_i)^{-1} = (z_i b^{-1})^{-1} = b z_i^{-1}$

und natürlich

4) $e \in \mathbf{Z}$.

Da selbstverständlich $z_i z_k = z_k z_i$ gilt, ist **Z** abelsch.

Definition 5:

Die Menge $\mathbf{K} = \{ a_i, a_j, .. \in \mathbf{G} \mid \text{es gibt ein } x \in \mathbf{G} \text{ mit } a_i = x^{-1} a_j x \}$ heißt eine Klasse k konjugierter Elemente (a_i ist zu a_j konjugiert etc.).

Es folgt

1) **G** ist nach Klassen konjugierter Elemente zerlegbar.

Man sucht alle Elemente, die zu einem gegebenen konjugiert sind und faßt sie in $\mathbf{K}_1$ zusammen. Ist $\mathbf{K}_1 \neq \mathbf{G}$, gibt es ein weiteres, das zu keinem Element aus $\mathbf{K}_1$ konjugiert ist, und man bildet die Klasse $\mathbf{K}_2$ der zu diesem Element konjugierten Elemente. So fortfahrend erhält man Klassen $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, ..., \mathbf{K}_n$ mit

$$\mathbf{K}_i \cap \mathbf{K}_j = \varnothing ,$$

denn zwei Elemente aus verschiedenen Klassen sind nicht konjugiert und insbesondere verschieden, und

$$\mathbf{K}_1 \cup ... \cup \mathbf{K}_n = \mathbf{G} .$$

2) e bildet immer eine Klasse für sich, denn

$$a = x^{-1} e x = e x^{-1} x = e e = e$$

3) Jedes Zentrumselement bildet eine Klasse für sich.

4) In abelschen Gruppen besteht jede Klasse aus nur einem Element.

SATZ 5

Die Zahl der Elemente einer Klasse ist Teiler der Gruppenordnung.

Beweis:

Sei für beliebiges $y \in G$ $\mathbf{N}(y) = \{ x_i \mid x_i y = y x_i \}$.

N(y) ist Untergruppe zu **G**, da

1) $e \in \mathbf{N}(y)$

2) $x_i^{-1} \in \mathbf{N}(y)$: $y = x_i^{-1} y x_i = x_i y x_i^{-1} = (x_i^{-1})^{-1} y x_i^{-1}$

3) $x_i x_j \in \mathbf{N}(y)$: $x_i x_j y (x_i x_j)^{-1} = x_i y x_i^{-1} = y$.

w.z.b.w.

Damit ist **G** nach Linksnebenklassen von **N** zerlegbar:

$$\mathbf{G} = e\mathbf{N} \cup u\mathbf{N} \cup v\mathbf{N} \cup \ldots \cup w\mathbf{N} .$$

Insbesondere ist nach SATZ 3 die Ordnung von **N** Teiler von Ord **G**.
Weiter gilt nach Definition

für alle x_i aus **N**(y): $y = x_i y x_i^{-1}$

und

für <u>alle</u> a aus u **N**(y): $a y a^{-1} = u y u^{-1}$,

da

$$a y a^{-1} = u x_i y x_i^{-1} u^{-1} = u y u^{-1} .$$

Also kann man u **N**(y) mit dem zu y konjugierten Element $u y u^{-1}$ identifizieren, denn zwei verschiedene Elemente a, b mit

$$a y a^{-1} = b y b^{-1}$$

gehören zur gleichen Nebenklasse:

aus $\quad a\,y\,a^{-1} = b\,y\,b^{-1}$

folgt $\quad y = a^{-1}\,by\,(a^{-1}\,b)^{-1}$,

also $\quad a^{-1}\,b \in \mathbf{N}(y)$

oder $\quad a^{-1}\,b\,\mathbf{N} = \mathbf{N}$

oder $\quad b\,\mathbf{N} = a\,\mathbf{N}$.

Also entspricht jede Nebenklasse u **N**(y) genau einem zu allen anderen verschiedenen Element $u\,y\,u^{-1}$, das zu y konjugiert ist. Die Anzahl k der zu y konjugierten Elemente ist also gleich der Zahl der Nebenklassen zu **N**(y). Wegen SATZ 3 ist damit aber die Anzahl konjugierter Elemente Teiler der Gruppenordnung:

$$\text{Ord}\,\mathbf{G} = k\ \text{ord}\,\mathbf{N}$$

w.z.b.w.

II) Die Gruppenalgebra

In den physikalischen Anwendungen zeigte es sich, daß man mit dem bisherigen Konzept nicht auskam und nahm daher die Erweiterung der Gruppe zur Gruppenalgebra **G**' vor.

Der wesentliche Gedanke ist, daß auf **G** Linearkombinationen und die Multiplikation mit einem Skalar (reelle oder imaginäre Zahl) erklärt werden.
Schließlich werden die Elemente von **G**' als lineare Operatoren auf einem Vektorraum aufgefaßt.

Man hat also die

Definition 6:

Sei **G** eine endliche Gruppe der Ordnung n : $\mathbf{G} = \{ a_j \}$.
Die Gruppenalgebra $\mathbf{G}' = \{ A_j \}$ zur Gruppe **G** besteht aus allen Linearkombinationen

$$A_k = \Sigma_j\, c(j) a_j \quad ; c(j) \in \mathbf{R} \text{ (bzw. } \mathbf{C} \text{)}$$

(Man schreibt auch manchmal $A_k = \Sigma_{\mathbf{G}}\, c(g)\, g$)

Insbesondere sind die Gruppenelemente spezielle Elemente von **G**'.

Definition 7:

Auf **G**' wird für $A_j = \Sigma_m\, x(m)\, g_m \;\; ; \;\; B_k = \Sigma_n\, y(n)\, g_n$

durch

$$A_j + B_k = \Sigma_m [\, x(m)+y(m)\,]\; g_m$$

und

$$A_j B_k = \Sigma_m \Sigma_n\, x(m)\, y(n)\; g_m g_n$$

eine Addition bzw. Multiplikation erklärt.
Da $g_m g_n \in$ **G** ist $A_j B_k \in$ **G**'! Das Einselement der Gruppe ist auch Einselement der Gruppenalgebra.

Analog zum Zentrum in der Gruppe erklärt man das Zentrum **Z** in **G**':

Definition 8:

$$\mathbf{Z} = \{\, A_k \in \mathbf{G}' \;|\; \text{für alle } B \in \mathbf{G}' : \; BA_k = A_k B \,\} \; .$$

Definition 9:

Sei **K** eine Klasse konjugierter Elemente : **K** = { $k_1, k_2, \ldots, k_N$ }, dann heißt

$$k = \sum_{j=1}^{N} k_j$$

die zugehörige Klassensumme.

Jetzt gilt der

SATZ 6

Die Klassensummen bilden eine Basis von **Z**, d.h., jedes Element von **Z** läßt sich als Linearkombination von Klassensummen schreiben.

Beweis:

Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

a) die Klassensummen sind Elemente von **Z**
b) jedes Zentrumselement ist eine Linearkombination von Klassensummen.

a) Sei $k = k_1+k_2+...+k_N$ die Klassensumme zu einer gegebenen Klasse **K**.

Sei $a \in G$; die Elemente $a^{-1} k_i a$ liegen in **K**.
Sie sind alle verschieden, denn wäre

$$a^{-1} k_i a = a^{-1} k_j a ,$$

so folgte

$$k_i = k_j .$$

Also gilt

$$a^{-1} \mathbf{K} a = \mathbf{K}$$

und damit

$$k = \sum_{j=1}^{N} a^{-1} k_j a = a^{-1} k a$$

bzw.

$$a\,k = k\,a.$$

Damit ist k mit jedem Element von **G** und damit auch von **G**' vertauschbar : $k \in \mathbf{Z}$.

b) Sei $f = \Sigma_i\, x(i)\, g_i \in \mathbf{Z}$ und k_1, k_2 zwei konjugierte Gruppenelemente : $k_1 = a^{-1} k_2\, a$. f ist als Zentrumselement mit a vertauschbar:

$$a\,f = a\,\Sigma_i\, x(i)\, g_i = (\Sigma_i\, x(i)\, g_i)\, a$$

Durch Multiplikation von links mit a^{-1} folgt

$$\Sigma_i\, x(i)\, g_i = \Sigma_i\, x(i)\, a^{-1} g_i\, a .$$

Die Summe erstreckt sich über alle Gruppenelemente. Durch Koeffizientenvergleich für

$$z_i = k_1$$

folgt

$$x(k_1) = x(k_2).$$

Das heißt, für ein Zentrumselement f sind die Koeffizienten für konjugierte Elemente gleich; sie können daher ausgeklammert und dann als Koeffizient vor die Klassensummen geschrieben werden. Also ist das Zentrumselement f eine Linearkombination der Klassensummen.

w.z.b.w.

Es sei nun noch der Begriff des Idempotents eingeführt.

Definition 10:

Ein Element P <> 0 aus **G**' heißt idempotent, wenn $P^2 = P$.

Definition 11:

Zwei Elemente a,b aus **G**' heißen orthogonal, wenn ab = 0.

Unter einem System orthogonaler Idempotente versteht man die Menge

$I = \{ P_1, P_2, ..., P_N \}$ mit $P_i P_j = 0$ für alle i,j; i<>j.

SATZ 7

Orthogonale Idempotente sind linear unabhängig.

Beweis:

Sei $\quad \Sigma_i a_i P_i = 0$.

Durch Multiplikation mit P_k folgt

$$a_k P_k = 0 \text{ , also } a_k = 0.$$

w.z.b.w.

SATZ 8

Die Summe orthogonaler Idempotente ist wieder idempotent.

Beweis:

Sei $\quad P = \Sigma_i P_i$.

Dann gilt

$$P^2 = \Sigma_i \Sigma_j P_i P_j = \Sigma_i P_i^2 = \Sigma_i P_i = P \text{ ;}$$

wegen SATZ 7 ist $\Sigma_i P_i <> 0$ und damit ist P idempotent.

w.z.b.w.

Im Folgenden sei $I = \{ P_1, P_2, \ldots, P_N \}$ ein <u>maximales</u> System orthogonaler Idempotente in **Z**. Dann gilt

SATZ 9 $\quad \Sigma_i P_i = e$

Beweis:

Sei $\Sigma_i P_i = A$. Nach SATZ 8 ist $A^2 = A$.
Ist $A <> e$, dann wäre $P_{N+1} = e - A <> 0$.
Andrerseits ist P_{N+1} idempotent

$$(P_{N+1})^2 = (e - A)(e - A) = e - 2eA + A^2 =$$

$$e - A = P_{N+1}$$

und orthogonal zu den anderen

$$P_j \, P_{N+1} = P_j - P_jA = P_j - \Sigma_i P_j P_i$$

$$= P_j - P_j = 0.$$

Damit hätte man ein weiteres zu den Elementen von I orthogonales Idempotent gefunden, was aber der Maximalität von I widerspricht. Also

$$\Sigma_i P_i = e \quad .$$

w.z.b.w.

SATZ 10

Jedes P_i ist unzerlegbar; es gibt also keine von Null verschiedenen orthogonalen Idempotente $A, B \in \mathbf{Z}$ mit $A + B = P_i$.

Beweis:

Sei $$A + B = P_i ,$$

dann folgt durch Multiplikation mit A bzw. B

$$A = A P_i$$

und

$$B = B P_i$$

wegen der Orthogonalität von A und B. Daraus folgt für die übrigen Idempotenten P_k

$$A P_k = 0 \quad \text{und} \quad B P_k = 0.$$

(Orthogonalität zu den P_k!)

Also könnte man P_i durch A und B ersetzen, was der Maximalität von I widerspricht. Damit ist der Satz bewiesen.

SATZ 11

Ist A irgendein Idempotent $\in \mathbf{Z}$, dann ist A eine Linearkombination der $P_k \in I$.

Beweis:

Es war $\Sigma_j P_j = e$, also $A = A e = \Sigma_j A P_j$.

Wenn $A P_j <> 0$, dann $A P_j = P_j$ und damit ist A eine Linearkombination aus den P_j.

Sei nämlich $A P_j <> P_j$, dann sind $X = A P_j$ und $Y = P_j - A P_j$

1) orthogonal: $XY = AP_jP_j - AP_jAP_j$

$= AP_j - AP_j = 0$

2) idempotent: $X^2 = AP_jAP_j = AAP_jP_j = AP_j = X$

$Y^2 = (P_j - AP_j)(P_j - AP_j) =$

$= P_jP_j - P_jAP_j - AP_jP_j + AP_jAP_j$

$= P_j - AP_j = Y$,

was im Widerspruch zu SATZ 10 steht. Also ist AP_j entweder 0 oder P_j.

w.z.b.w.

SATZ 12

Es gibt im Zentrum der Gruppenalgebra ein eindeutig bestimmtes System orthogonaler Idempotente.

Beweis:

Sei $\{ A_1, A_2,...,A_N \}$ ein zweites maximales System orthogonaler Idempotente. Wegen SATZ 11 ist jedes A_i Summe einiger P_k . Nach SATZ 10 ist aber jedes Element eines maximalen Systems orthogonaler Idempotente unzerlegbar, d.h., es tritt nur ein Summand auf. Mithin ist das System $\{ A_1, A_2,...,A_N \}$ nur durch Umnumerierung von $\{ P_1,...,P_N \}$ entstanden.

w.z.b.w.

$A \in$ **G**' heißt invertierbar, wenn es ein $B \in$ **G**' gibt, so daß

$$AB = BA = E.$$

SATZ 13

E ist das einzige invertierbare Idempotent aus **G**'.

Beweis:

Sei nämlich $A \in$ **G**' idempotent und invertierbar:

$$A\,A^{-1} = E\,.$$

Dann folgt

$$A^2\,A^{-1} = A$$

Andrerseits ist wegen $A^2 = A$

$$A^2A^{-1} = AA^{-1} = E \quad ,$$

also

$$A = e$$

w.z.b.w.

Sei nun **V** ein beliebiger Vektorraum. Faßt man **G**' als (lineare) Abbildung

G' : **V** nach **V**

auf, d.h., jedes Element aus **G**' wirkt als linearer Operator auf die Elemente von **V**, so erweisen sich die Idempotente als Projektoren auf verschiedene Unterräume von **V**.

Im Folgenden werden die Elemente von **V** mit kleinen Buchstaben im Fettdruck bezeichnet:

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots \}$$

An dieser Stelle sei noch einmal der Begriff des Vektorraums erklärt:

Definition 12:

Eine Menge $\mathbf{V} = \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots \}$ heißt Vektorraum, wenn

a) in **V** eine Abbildung +: **V** nach **V** erklärt ist, mit $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

c) es gibt genau ein Element $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ mit $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$

d) zu jedem $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ existiert ein $-\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ mit $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

e) in V ist eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt mit den Eigenschaften ($n,m \in \mathbf{R}$)

1. $n\,\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{a} + \dots + \mathbf{a}}_{\text{n-mal}}$

2. $n\,(m\,\mathbf{a}) = (n\,m)\,\mathbf{a}$

3. $(n + m)\,\mathbf{a} = n\,\mathbf{a} + m\,\mathbf{a}$

4. $0\,\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad , 0 \in \mathbf{R} \; ; \; \mathbf{0} \in \mathbf{V}$.

f) es gibt k Vektoren $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ in **V**, so daß sich jeder Vektor $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ eindeutig als Linearkombination der $\mathbf{b}_i$ darstellen läßt.

$\{ \mathbf{b}_j \}$ heißt auch Basis von **V**. Insbesondere heißt **V** endlich-dimensional bzw. von der Dimension k und man schreibt oft

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}^k .$$

Eine Teilmenge **U** von **V** heißt Unterraum, wenn für **U** die obigen Eigenschaften gelten; insbesondere ist für $j < k$ $\mathbf{R}^j$ Unterraum von $\mathbf{R}^k$.

Wenn nun die Elemente einer Gruppe **G** und damit auch die Elemente der zugehörigen Gruppenalgebra **G**' als Operatoren auf einem Vektorraum **V** wirken, also jeder Vektor **a** aus **V** durch die Gruppen(algebra)elemente in einen anderen Vektor **x** aus **V** überführt wird, so läßt sich der Vektorraum durch Anwendung der Idempotente in Teilräume zerlegen.

Sei $\{ P_1,...,P_N \}$ ein maximales System orthogonaler Idempotente aus **Z**, **x** aus **V**.

Definition 13:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{V} \text{ heißt von i-tem Typ, wenn } P_i\mathbf{x} = \mathbf{x} .$$

Sei $\mathbf{U}_i = \{ \mathbf{a}_i ,\mathbf{b}_i ,... \mid P_i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i ,... \}$, also die Menge aller Vektoren aus **V** vom i-ten Typ. Dann gilt

SATZ 14

U ist ein **G**-invarianter Unterraum von **V**. (d.h. die Gruppenelemente führen **U** in sich über)

Beweis:

a) **U** ist Unterraum; dazu ist zu zeigen, daß mit $\mathbf{a}_i$ und $\mathbf{b}_i$ auch $\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$ aus **U** ist. Das gelingt mit

$$P_i (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) = P_i\mathbf{a}_i + P_i\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i .$$

b) **U** ist **G**-invariant; d.h., mit $\mathbf{x}_i$ ist auch für beliebiges $g \in \mathbf{G}$ oder $g\,\mathbf{x}_i \in \mathbf{U}$, weil :

$$P_i\,(g\,\mathbf{x}_i) = g\,P_i\,\mathbf{x}_i = (g\,\mathbf{x}_i), \qquad \text{also ist } (g\,\mathbf{x}_i) \in \mathbf{U}\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Analog ergibt sich für beliebiges $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$:

$$P_i\mathbf{a} \in \mathbf{U}_i \quad ,$$

denn

$$P_i(\,P_i\mathbf{a}\,) = P_i^2\,\mathbf{a} = P_i\,\mathbf{a}\,.$$

Mit anderen Worten, der Operator P_i bildet ein <u>beliebiges</u> Element $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ in den Unterraum **U** von **V** ab bzw. $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ wird auf $\mathbf{U}_i$ projeziert.

SATZ 15

Unterräume verschiedenen Typs haben nur den Nullvektor gemeinsam:

$$\mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j = \{\,\mathbf{0}\,\}$$

Beweis:

Mit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ folgt $P_i\mathbf{a} \in \mathbf{U}_i$ und $P_j\mathbf{b} \in \mathbf{U}_j$.
Sei nun $P_j\mathbf{b} \in \mathbf{U}_i$, dann gilt , wenn $\{\,\mathbf{b}_1(i),....,\mathbf{b}_k(i)\,\}$ die Basis von $\mathbf{U}_i$ ist

$$P_j\,\mathbf{b} = \sum_{n=1}^{k} c_n \mathbf{b}_n(i)$$

und

$$P_iP_j\mathbf{b} = \mathbf{0} = \Sigma\, c_n P_i \mathbf{b}_n(i) = \Sigma\, c_n \mathbf{b}_n(i) = P_j\mathbf{b} \quad ,$$

also

$$\mathbf{0} = P_j\mathbf{b}.$$

w.z.b.w.

SATZ 16

Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ läßt sich eindeutig als Summe von Vektoren $\mathbf{x}_i$ darstellen:

$$\mathbf{x} = \Sigma\, \mathbf{x}_i \quad .$$

Beweis:

Wegen $e = \Sigma\, P_j$ (SATZ 9) und

$$e\,\mathbf{x} = \mathbf{x} = \Sigma\, P_j\mathbf{x} = \Sigma\, \mathbf{x}_j$$

ist $\mathbf{x}$ durch die Summe darstellbar. Diese Zerlegung ist eindeutig:
Gebe es nämlich eine zweite Darstellung $\mathbf{x} = \Sigma\, \mathbf{x}_j^*$,
dann wäre

$$\Sigma\, \mathbf{x}_j^* = \Sigma\, \mathbf{x}_j$$

und wegen $P_k\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k$ und $P_k\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ gilt

$$P_k\, \Sigma\, \mathbf{x}_n^* = \mathbf{x}_k^* = P_k\, \Sigma\, \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_k \quad ,$$

also

$$\mathbf{x}_k^* = \mathbf{x}_k \quad .$$

w.z.b.w.

Das heißt aber

$$\mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j = \{ \mathbf{0} \}$$

$$\mathbf{U}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{U}_n = \mathbf{V} \quad .$$

SATZ 17

Sei $\mathbf{U}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{U}_n = \mathbf{V}$ eine Zerlegung von **V** nach den Typen von **G**' und **H** ein linearer Operator auf **V** mit **HG**' = **G**'**H**, dann gilt

1) **H** ist linearer Operator auf $\mathbf{U}_j$: für $\mathbf{x} \in \mathbf{U}_j$ ist $\mathbf{H}\,\mathbf{x} \in \mathbf{U}_j$

2) Löst man die Eigenwertaufgabe von $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = c\,\mathbf{x}$ für jeden Unterraum $\mathbf{U}_k$, so hat man alle Eigenwerte von **H**.

3) Es gibt ein System linear unabhängiger Eigenvektoren von **H**, von denen jeder in einem der Unterräume $\mathbf{U}_j$ liegt und aus denen sich jeder weitere Eigenvektor linear kombinieren läßt.

Beweis:

1) Sei $\mathbf{x} \in \mathbf{U}_j$, d.h. $P_j\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Daraus folgt

$$\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{H}\,P_j\,\mathbf{x} = P_j\,\mathbf{H}\,\mathbf{x} \,.$$

Also ist $\mathbf{Hx} \in \mathbf{U}_j$.

2) Sei **y** ein beliebiger Eigenvektor von **H** zum Eigenwert c:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{y} = c\,\mathbf{y}$$

und

$$\mathbf{y} = \Sigma\,\mathbf{y}_j \quad .$$

Daraus folgt

$$\Sigma\, \mathbf{H}\, \mathbf{y}_j \;=\; \Sigma\, c\, \mathbf{y}_j$$

und wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung (SATZ 16)

$$\mathbf{H}\, \mathbf{y}_j \;=\; c\, \mathbf{y}_j \quad .$$

Jede von **0** verschiedene Komponente $\mathbf{y}_j$ von **y** ist daher ebenfalls Eigenvektor von **H** zum Eigenwert c. Damit hat man 2) und 3)!

w.z.b.w.

Die vorstehenden Ergebnisse sind zwar einleuchtend und sichern der Gruppentheorie die Anwendungen in der Physik, aber richtig rechnen kann man offenbar noch nicht mit den bis jetzt geschaffenen Begriffen. Um dem abzuhelfen, führt man den Begriff der "Darstellung einer Gruppe" ein.

III) Darstellungstheorie

Definition 14:

Eine Darstellung T der Gruppe **G** in einem Vektorraum **V** liegt vor, wenn jedem a,b $\in$ **G** lineare Operatoren T(a) und T(b) von **V** so zugeordnet sind, daß stets

$$T(ab) \;=\; T(a)\, T(b)$$

entspricht.

Die Dimension des Raumes **V** heißt "Dimension" oder "Grad der Darstellung".

Beispiele von Darstellungen:

a) Sei **G** = { g_i } eine beliebige Gruppe, $\mathbf{R}^n$ der n-dimensionale Vektorraum, **E** die n-dimensionale Einheitsmatrix. Wir treffen folgende Zuordnung

g_i wird abgebildet auf $T(g_i) = \mathbf{E}$.

Offensichtlich ist dies eine Darstellung von **G**. Sie heißt Einsdarstellung, identische oder triviale Darstellung. Speziell für n = 1 wird jedes Gruppenelement auf die 1 der reellen Zahlen abgebildet.

b) Sei **G** = { C_k }, die Gruppe der Drehungen um eine Achse um den Winkel $\alpha = (2\pi) / k$ und **C** die Menge der komplexen Zahlen mit $i^2 = -1$. Die Zuordnung

$$C_k^n \text{ nach } \exp(2\pi i n / k)$$

ist eine Darstellung von **G**, denn die kombinierte Drehung

$$C_k^n C_k^m = C_k^{(m+n)}$$

wird abgebildet auf

$$\exp(2\pi i (m+n) / k)$$

und das ist gleich dem Produkt

$$\exp(2\pi i n / k) \exp(2\pi i m / k) \quad .$$

c) Man denkt sich die Gruppenelemente als Komponenten eines Spaltenvektors

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ . \\ . \\ . \\ g_k \end{pmatrix} \quad \text{, dann } g_j \, \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_j g_1 \\ . \\ . \\ . \\ g_j g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i1} \\ . \\ . \\ . \\ g_{ik} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_j \, \mathbf{g}$$

wobei $\mathbf{P}_j$ eine Permutationsmatrix ist. Weiter gilt

$$g_i g_k \mathbf{g} = g_i \mathbf{P}_k \mathbf{g} = g_i \mathbf{g}' = \mathbf{P}_i \mathbf{g}' = \mathbf{P}_i \mathbf{P}_k \mathbf{g} \ .$$

Trifft man die Zuordnung g_j wird abgebildet auf $\mathbf{P}_j$, so folgt die Zuordnung

$$g_j\, g_k \quad \text{wird abgebildet auf} \quad \mathbf{P}_j\mathbf{P}_k$$

und damit hat man eine n-dimensionale Darstellung von **G** gefunden. Die Gruppenelemente werden durch die n-dimensionalen Permutationsmatrizen dargestellt. Da für Matrizen die Addition erklärt ist, hat man gleichzeitig die Gruppenalgebra **G**'.

Definition 15:

Sei $A_{n,n}$ eine beliebige nichtsinguläre Matrix und $T(\mathbf{G}) = \{T(g_i)\}$ eine n-dimensionale Darstellung der Gruppe, dann heißt die Darstellung $T_A(\mathbf{G}) = A\,T(\mathbf{G})A^{-1}$ zur Darstellung $T(\mathbf{G})$ <u>äquivalent.</u>

Insbesondere ist $T_A(G)$ eine Darstellung: denn mit

g_i wird abgebildet auf $T_A(g_i)$ und g_j auf $T_A(g_j)$

wird g_ig_j abgebildet auf $AT(g_i)A^{-1}AT(g_j)A^{-1} = AT(g_i)T(g_j)A^{-1} =$

$$= AT(g_ig_j)A^{-1} = T_A(g_ig_j) .$$

Hat man also einmal eine Darstellung einer Gruppe,dann hat man auch beliebig viele (die alle äquivalent sind), da es unendlich viele nichtsinguläre Matrizen der Dimension n gibt.

Definition 16:

Sei $T(\mathbf{G})$ eine Matrizendarstellung der Gruppe **G**. Dann heißt die Zahl

$$x(g_j) = \text{Spur}\ T(g_j) = \Sigma_n\, T_{nn}(g_j)$$

der "Charakter des Gruppenelements g_j ".

Diese Namensgebung erklärt sich aus der Tatsache, daß die Charaktere eines Gruppenelements für verschiedene äquivalente Darstellungen gleich sind, $x(g_j)$ also quasi für g_j charakteristisch ist.
Sei nämlich

$$A = (a_{ik}) \,, \quad A^{-1} = (A_{ik}).$$

Dann gilt

$$\Sigma_j\, a_{ij}A_{jk} = \Sigma_j\, A_{ij}a_{jk} = \delta_{ik}$$

und

$$\mathrm{Spur}\ T_A(g_j) = \mathrm{Spur}\ A\ T(g_j)\ A^{-1} = \mathrm{Spur}(\Sigma_n\Sigma_m\, a_{im}T_{mn}(g_j)A_{nk})$$

$$= \Sigma_i\Sigma_n\Sigma_m\, a_{im}T_{mn}(g_j)A_{ni} = \Sigma_n\Sigma_m\, \delta_{mn}T_{mn}(g_j) = \Sigma_n\, T_{nn}(g_j) =$$

$$= \mathrm{Spur}\ T(g_j) = x(g_j)\,.$$

Es kann nun vorkommen, daß der Vektorraum, den man als Darstellungsraum für die Gruppe gewählt hat, einen **G**-invarianten Unterraum **U** enthält. Dabei heißt **G**-invariant, daß für alle

$$\mathbf{a} \in \mathbf{U} \quad \text{auch} \quad \mathbf{Ga} \in \mathbf{U}.$$

Offensichtlich bilden die linearen Operatoren auf **U** <u>auch</u> eine Darstellung der Gruppe, und man nennt dann den ursprünglichen Darstellungsraum reduzibel, andernfalls irreduzibel.

Beispiel

Darstellung der Gruppe der vierzähligen Drehungen um die Z-Achse des 3-dimensionalen Anschauungsraumes $\mathbf{R}^3$.

$$\mathbf{G} = \{ 1, C_4, C_4^{\,2}, C_4^{\,3} \}$$

Da wir als Darstellungsraum den $\mathbf{R}^3$ gewählt haben, werden die Gruppenelemente durch Operatoren auf $\mathbf{R}^3$,also durch 3x3 Matrizen repräsentiert. Man erhält nun eine Darstellung, wenn man folgende Zuordnung trifft

$$C_4^n = \begin{pmatrix} \cos(n\pi/2) & -\sin(n\pi/2) & 0 \\ \sin(n\pi/2) & \cos(n\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, gibt es einen zwei- und einen eindimensionalen Unterraum, die **G**-invariant sind. Damit zerfällt unsere Darstellung in eine 2-dimensionale und eine 1-dimensionale Darstellung; sie war also reduzibel.

Hat man in einem Darstellungsraum einen **G**-invarianten Unterraum gefunden und ist dieser auch noch reduzibel, so kann man mit der Ausreduktion fortfahren, bis man alle irreduziblen Darstellungen gewonnen hat. Bezüglich einer orthogonalen Basis zerfällt also der ursprüngliche Vektorraum in eine Menge von irreduziblen, orthogonalen Unterräumen, und man kann, hat man einmal die irreduziblen Darstellungen einer Gruppe, jede beliebige Darstellung aus den irreduziblen aufbauen.Darum werden wir im folgenden die Eigenschaften <u>irreduzibler</u> Darstellungen untersuchen.

Bevor als wichtiges Ergebnis der Theorie irreduzibler Darstellungen der Satz von SCHUR behandelt wird, sei kurz auf einige Begriffe der linearen Algebra eingegangen.

Sei $A = (a_{ik})$ eine n,n-Matrix. Man sagt, A habe den Rang r (Rang(A) = r), wenn genau r Zeilen in A linear unabhängig sind.

Seien $\mathbf{x}_i$ beliebige n-dimensionale Vektoren: $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n$. Die Vektoren

$$\mathbf{y}_i = A\mathbf{x}_i$$

spannen einen r-dimensionalen Vektorraum auf: Setzt man nämlich für $\mathbf{x}_i$ nacheinander die (linear unabhängigen) Basisvektoren $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ ein, so erhält man als Bildvektoren $\mathbf{y}_i$ genau r linear unabhängige, also ist die Dimension des von den Bildvektoren aufgespannten Raumes gleich r.

Betrachten wir das Gleichungssystem

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad , \quad \mathbf{y} <> \mathbf{0}$$

Es hat genau dann eine Lösung, wenn det A $<>$ 0. Da die Determinante aber dann verschwindet, wenn nur zwei Zeilen von A linear abhängig sind, muß für den Fall der Lösbarkeit gelten:

$$r = n.$$

Im Falle des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ liegen die Dinge anders. Da in dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
\quad\quad . \\
\quad\quad . \\
\quad\quad . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0
\end{array}$$

n-r Zeilen linear abhängig sind, erhält man durch Umformen

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1,r+1}\,x_{r+1} + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0 \\
\quad\quad a_{22}'x_2 + .. + a_{2,r+1}'\,x_{r+1} + \ldots + a_{2n}'\,x_n = 0 \\
\quad\quad\quad\quad . \quad\quad . \\
\quad\quad\quad\quad . \quad\quad . \\
\quad\quad\quad\quad a_{rr}'x_r + \ldots + a_{rn}'\,x_n = 0
\end{array}$$

ein äquivalentes Gleichungssystem. Setzt man sukzessive

$x_j = 1$, $j = r+1$ bis n, $x_k = 0$ für $k > r$ und $j <> k$, so erhält man mit den Vektoren

$$\mathbf{y}^T = (c_1, c_2, \ldots, c_r, 0, 0, \ldots, \underset{j}{1}, 0, \ldots \underset{n}{0})$$

r Gleichungen für die r Unbekannten c_k und damit ein System linear unabhängiger Vektoren, die das System $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ erfüllen. Die $\mathbf{y}$ bilden einen Unterraum der Dimension n-r.

Beispiel: Zu lösen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 10 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & -3 & -7 \end{pmatrix};$$

man bildet D_1 dadurch, daß man in der Einheitsmatrix die erste Spalte durch die Größen $-a_{1k}/a_{11}$, $k <> 1$, ersetzt und erhält

$$D_1 A \mathbf{x} = D_1 \mathbf{0} = \mathbf{0} ,$$

mit

$$D_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -7 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -16 & -6 & -4 & -13 \\ 0 & -10 & -7 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Nun bildet man D_2 , wobei man in der Einheitsmatrix die 2-te Spalte durch die Elemente $-a_{2k} / a_{22}$ von D_1A, $k <> 2$, ersetzt und erhält

$$D_2D_1A = \begin{pmatrix} 1 & 3/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16/10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -7 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -16 & -6 & -4 & -13 \\ 0 & -10 & -7 & -5 & -10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/10 & 172 & 0 \\ 0 & -10 & -7 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 52/10 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 52/10 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analog bildet man D_3 und es ergibt sich

$$D_3D_2D_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/52 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 70/52 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/10 & 2/2 & 0 \\ 0 & -10 & -7 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 52/10 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 52/10 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 30/52 & 3/52 \\ 0 & -10 & 0 & 20/52 & -310/52 \\ 0 & 0 & 52/10 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also sind zwei der 5 Zeilen von A linear abhängig und 3 linear unabhängig und damit ist Rang(A) = 3. Es muß also n – r = 5 – 3 = 2 Lösungsvektoren geben, die man nach dem angegebenen Verfahren erhält: Sei

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, a_3, 1, 0); \quad \mathbf{b}^T = (b_1, b_2, b_3, 0, 1) ,$$

dann ist

$$(D_3D_2D_1A\,\mathbf{a})^T = (a_1 + 30/52 , -10a_2 + 20/52, 52a_3/10 + 4, 0, 0) = \mathbf{0}$$

also

$$a_1 = -30/52, \ a_2 = 2/52 , a_3 = -40/52$$

und

$$(D_3D_2D_1A\,\mathbf{b})^T = (b_1 + 3/52 , -10b_2 - 310/52, 52b_3/10 + 3, 0, 0) = \mathbf{0}$$

und damit

$$b_1 = -3/52 , \ b_2 = -31/52 , \ b_3 = -30/52 \quad ,$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Probe:

$$A\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 10 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -30 \\ 2 \\ -40 \\ 52 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$A\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 10 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -31 \\ -30 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir kommen nun zum

SATZ 18

(Satz von SCHUR)

Seien $\{ T^i(g) \}$, $\{ T^j(g) \}$ zwei irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathbf{G} = \{ g \}$ im $\mathbf{R}^i$ bzw. $\mathbf{R}^j$. Gibt es ein B mit Rang(B) = r, so daß für alle $g \in \mathbf{G}$

$$T^i(g)\, B \;=\; B\, T^j(g)$$

gilt, dann ist entweder

$$B = 0 \quad \text{oder} \quad \det B <> 0 \;.$$

Beweis:

Wir betrachten eine solche Matrix B mit dem Rang r.

Sei $\mathbf{U} = \{ \mathbf{a} \in \mathbf{R}^j \mid B\,\mathbf{a} = \mathbf{0} \}$, dann ist $\dim \mathbf{U} = j - r$.

$\mathbf{U}$ ist $\mathbf{G}$-invariant: d.h. $T^j(g)\mathbf{a} \in \mathbf{U}$, weil

$$B\, T^j(g)\, \mathbf{a} = T^i(g)\, B\, \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad .$$

Also ist wegen der Irreduzibilität von $\mathbf{R}^j$, die die Existenz eines $\mathbf{G}$-invarianten Unterraumes $\mathbf{U}$ ausschließt, entweder

$$\mathbf{U} \;=\; \mathbf{R}^j \quad \text{oder} \quad \mathbf{U} \;=\; \varnothing \quad .$$

Für die Dimension des Raums $\mathbf{U}$ bedeutet das, daß entweder

$$j = j - r \quad \text{oder} \quad 0 = j - r$$

gilt.

Sei andererseits

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^i \mid \mathbf{y} = B\,\mathbf{x} \text{ mit } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^j \} \quad .$$

Dann ist $\dim \mathbf{V} = r$.

Auch $\mathbf{V}$ ist $\mathbf{G}$-invariant, denn

$$T^i(g)\mathbf{y} = T^i(g)B\,\mathbf{x} = BT^j(g)\mathbf{x} = B\,\mathbf{x}' \in \mathbf{V} \, .$$

Damit gilt wegen der Irreduzibilität von $\mathbf{V}$ entweder

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}^i \quad \text{oder} \quad \mathbf{V} = \emptyset \quad .$$

Für $\dim \mathbf{V}$ bedeutet das wiederum entweder

$$r = i \quad \text{oder} \quad r = 0 \quad .$$

Insgesamt ist also

$$r = 0 \quad \text{und damit} \quad B = 0$$

oder

$$r = j = i \quad \text{und} \quad \det B <> 0 \quad .$$

w.z.b.w.

Mit diesem Ergebnis erhält man den

SATZ 19

Die einzige Matrix, die mit allen anderen einer irreduziblen Darstellung vertauschbar ist, ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix.

Beweis:

Sei $\mathbf{R}^n$ der Darstellungsraum einer irreduziblen Darstellung $\{ T^n(g) \}$.

Sei P derart, daß für alle $g \in \mathbf{G}$: $P\, T^n(g) = T^n(g)\, P$. Wir bilden mit der n,n-Einheitsmatrix E die Matrix

$$Q = \mu E - P$$

und wählen für μ einen Eigenwert von P. Dann gilt

$$\det Q = \det(\mu E - P) = 0 \quad .$$

Andererseits ist

$$T^n(g)\, Q = T^n(g)(\mu E - P) = \mu\, T^n(g) - T^n(g) P = Q\, T^n(g) \ ,$$

also ist auch Q mit allen T's vertauschbar. Dann gilt aber nach SATZ 18 entweder

$$\det Q <> 0$$

oder

$$Q = 0 \qquad .$$

Da det Q = 0 bleibt nur

$$Q = \mu E - P = 0$$

bzw.

$$P = \mu E \ .$$

w.z.b.w.

Wir bilden nun die Matrix

$$P = \Sigma_{g\in \mathbf{G}} T^i(g)\, X\, T^j(g^{-1}) \qquad ,$$

wobei X eine <u>beliebige</u> Matrix passender Spalten- und Zeilenzahl ist. Dann gilt für $r \in \mathbf{G}$

$$T^i(r)\, P = T^i(r)\, (\Sigma_{g\in \mathbf{G}} T^i(g)\, X\, T^j(g^{-1})) \, .$$

Man kann von rechts mit der Einheitsmatrix $E = T^j(r^{-1})T^j(r)$ erweitern und erhält

$$\begin{aligned} T^i(r)\, P &= T^i(r)\, (\Sigma_{g\in \mathbf{G}} T^i(g)\, X\, T^j(g^{-1}))\, T^j(r^{-1})T^j(r) \\ &= (\Sigma_{g\in \mathbf{G}} T^i(r)T^i(g)\, X\, T^j(g^{-1})T^j(r^{-1}))\, T^j(r) \\ &= (\Sigma_{g\in \mathbf{G}} T^i(r\, g)\, X\, T^j(g^{-1}\, r^{-1}))\, T^j(r) \end{aligned}$$

Nun durchläuft mit g natürlich auch r g die gesamte Gruppe. In der Klammer steht also wieder die Matrix P und wir haben

$$T^i(r)\, P = P\, T^j(r) \, .$$

Also ist nach SATZ 18 entweder $P = 0$ oder $P = \mu E$.

Um dieses Ergebnis auszunützen, wählen wir für die Matrix X, die ja beliebig war, eine besondere Gestalt:

$$x_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{für } a = p,\ b = q \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Für die Matrixelemente von P enthält man dann

$$P_{nm} = \Sigma_{g\in \mathbf{G}} \Sigma_{a,b} T^{i}{}_{na}(g) X_{ab} T^{j}{}_{bm}(g^{-1})$$

$$= \Sigma_{g\in \mathbf{G}} T^{i}{}_{np}(g) T^{j}{}_{qm}(g^{-1}) .$$

Sei nun:

<u>erstens</u> $P = 0$, d.h. $P_{nm} = 0$, dann gilt

1) $\Sigma_{g\in \mathbf{G}} T^{i}{}_{np}(g) T^{j}{}_{qm}(g^{-1}) = 0$;

<u>zweitens</u> $P = \mu E$, d.h. $i = j$ (SATZ 19) und $P_{nn} = \mu$; $P_{ik} = 0$.

Dann wird :

2) $P_{nm} = \Sigma_{g\in \mathbf{G}} T^{i}{}_{np}(g) T^{i}{}_{qm}(g^{-1}) = \mu\, \delta_{nm}$.

Setzt man $n = m$ und summiert über n , so wird

$$\Sigma_n P_{nn} = \mu\, i = \Sigma_{g\in \mathbf{G}} \Sigma_n T^{i}{}_{np}(g) T^{i}{}_{qn}(g^{-1})$$

$$= \Sigma_{g\in \mathbf{G}} \Sigma_n T^{i}{}_{qn}(g^{-1}) T^{i}{}_{np}(g)$$

$$= \Sigma_{g\in \mathbf{G}} \delta_{qp}$$

$$= \delta_{qp} \text{ Ord } \mathbf{G} .$$

Daraus folgt

$$\mu = (\delta_{qp} \text{ Ord } \mathbf{G}) / i .$$

Also ist mit 2)

3) $\Sigma_{g\in \mathbf{G}} T^{i}{}_{np}(g) T^{i}{}_{qm}(g^{-1}) = (\delta_{nm}\, \delta_{qp} \text{ Ord } \mathbf{G})/ i$.

Die Ergebnisse 1) - 3) lassen sich zusammenfassen im

SATZ 20 ("Großes Orthogonalitätstheorem", "GOT")

Für die Matrixelemente irreduzibler Darstellungen

im $\mathbf{R}^i$ bzw. $\mathbf{R}^j$ gilt

$$\Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, T^i{}_{np}(g)\, T^j{}_{qm}(g^{-1}) = (\, \delta_{ij}\, \delta_{nm}\, \delta_{qp}\ \mathrm{Ord}\ \mathbf{G}\,)/i$$

Mit dem eben bewiesenen "GOT" erhält man sofort

SATZ 21

Die Charaktere inäquivalenter irreduzibler Darstellungen sind zueinander orthogonal.

Beweis:

$$\Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, x^i(g)x^j(g^{-1}) =$$

$$= \Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, (\Sigma_n\, T^i{}_{nn}(g))(\Sigma_m\, T^j{}_{mm}(g^{-1}))$$

$$= \Sigma_n\Sigma_m\, \Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, T^i{}_{nn}(g)\, T^j{}_{mm}(g^{-1}))$$

$$= \Sigma_n\Sigma_m\, (\, \delta_{ij}\, \delta_{nm}\, \delta_{mn}\ \mathrm{Ord}\ \mathbf{G}\,)/i$$

$$= \Sigma_m\, (\, \delta_{ij}\ \mathrm{Ord}\ \mathbf{G}\,)/i$$

$$= \delta_{ij}\ \mathrm{Ord}\ \mathbf{G}$$

$$= (0 \text{ für } i<>j)$$

w.z.b.w.

Damit hat man dann natürlich auch

$$\Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, x(g)x(g^{-1}) = \text{Ord } \mathbf{G} \quad .$$

Wir werden später sehen (SATZ 26), daß jede Darstellung einer Gruppe zu einer unitären Darstellung äquivalent ist. Für unitäre Darstellungen gilt aber, daß der Charakter $x(g^{-1})$ des zu g inversen Gruppenelementes konjugiert-komplex zu x(g) ist.
Dann wird

$$x(g)x(g^{-1}) = x(g)x(g)^{*} = |\, x(g)\, |^{2}$$

und damit

$$\Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, |\, x(g)\, |^{2} = \text{Ord } \mathbf{G}$$

SATZ 22

Der Charakter einer reduziblen Darstellung T ist gleich der Summe der Charaktere der irreduziblen Bestandteile von T.

Beweis:

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Quasidiagonalgestalt der Matrizen T bezüglich einer geeigneten Basis. Taucht die j-te irreduzible Darstellung genau a_j-mal auf, so gilt

$$x(g) = \Sigma_j\, a_j\, x^j(g) \quad .$$

Mit SATZ 21 erhält man nach kurzer Rechnung den

SATZ 23

Die Vielfachheiten a_j, mit der die irreduziblen Darstellungen einer Gruppe in einer gegebenen Darstellung vorkommen, sind eindeutig bestimmt.

Beweis:

Es war $\quad x(g) = \Sigma_j\, a_j\, x^j(g) \qquad ,$

also

$$a_m = \Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, x(g)x^m(g^{-1}) \qquad .$$

Wegen der Anmerkung zu SATZ 21 ist das identisch zu

$$a_m = \Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, x(g)x^m(g)^*$$

SATZ 24

Für die Charaktere der irreduziblen Darstellungen gilt, wenn n_m die Dimension der m-ten Darstellung und g ein Element der Gruppe ist

$$S(g) = \Sigma_m\, n_m x^m(g) = \delta_{1g} \text{ Ord G} .$$

Beweis:

$$\Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, S(g)\, x^k(g^{-1}) =$$

$$= \Sigma_m\, \Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, n_m x^m(g)x^k(g^{-1})$$

$$= \Sigma_m\, n_m\, \Sigma_{g\in \mathbf{G}}\, x^k(g^{-1})x^m(g)$$

$$= \Sigma_m n_m \delta_{km} \text{ Ord } \mathbf{G} \qquad \text{(nach SATZ 19)}$$

$$= n_k \text{ Ord } \mathbf{G}$$

Da aber $n_k = x^k(1)$, folgt durch Koeffizientenvergleich

$$S(1) = \text{Ord } \mathbf{G} , \quad S(g<>1) = 0 \quad .$$

w.z.b.w.

Dieser Satz läßt sich noch verallgemeinern. Sei nämlich A eine Matrix, deren Zeilen orthogonal sind, dann gilt

$$A A^t = E \quad ,$$

also

$$(A^t A) A^t = A^t$$

und damit auch

$$A^t A = E \quad ,$$

also sind auch die Spalten von A orthogonal, und es gilt

$$\Sigma_m a_{im} a_{km} = \Sigma_m a_{mi} a_{mk} = \delta_{ik} \quad .$$

Setzt man für die Matrixelemente a_{im} der Matrix A

$$a_{im} = (r_m/(\text{Ord } \mathbf{G}))^{1/2} x^i(K_m) \quad ,$$

wobei r_m die Zahl der Elemente in der Klasse K_m ist, dann wird wegen des GOT

$$\Sigma_m a_{im} a_{jm} = (\Sigma_m r_m x^i(K_m) x^j(K_m))/ (\text{Ord } \mathbf{G}) = \delta_{ij} \quad .$$

Also sind die Zeilen der so gewählten Matrix orthogonal und damit auch ihre Spalten, woraus dann folgt

$$\Sigma_m a_{mi} a_{mj} = (\Sigma_m (r_i r_j)^{1/2} x^m(K_i) x^m(K_j))/ (\mathrm{Ord}\ \mathbf{G}) = \delta_{ij} \quad .$$

Damit hat man in Verallgemeinerung zu SATZ 24 den

SATZ 25 $\quad \Sigma_m x^m(K_i) x^m(K_j) = \delta_{ij} (\mathrm{Ord}\ \mathbf{G}) / r_i \quad .$

SATZ 26

Jede Darstellung einer Gruppe ist zu einer unitären Darstellung äquivalent.

Beweis:

Zum Beweis geben wir ein Konstruktionsverfahren an (das hochgestellte + bedeutet die Matrix wird transponiert und alle Elemente konjugiert-komplex genommen) :

Sei { T } eine Darstellung der Gruppe. Die Matrix

$$H = \Sigma_g T^+(g)T(g)$$

ist hermitesch:

$$H^+ = (\Sigma_g T^+(g)T(g))^+ = \Sigma_g T^+(g)T(g)$$

und kann also mit einer unitären Matrix X, für die also gilt

$$X^+ X = X X^+ = E \quad ,$$

diagonalisiert werden:

$$X^+ H \; X = D$$

mit

$$D_{ii} = \Sigma_g \, (X^+ \, T^+(g) \, T(g) \, X)_{ii}$$

und

$$D_{ij} = 0 \; .$$

Setzt man T(g) X = A(g) , so folgt

$$D_{ii} = \Sigma_g \, (A^+(g) \, A(g))_{ii} \; .$$

$$= \Sigma_g \, (|A(g)|^2)_{ii}$$

Also ist D_{ii} als Summe von Quadraten ≥ 0 und damit die Existenz der Matrix $D^{1/2} = ((d_{ii})^{1/2})$ sichergestellt.

Die Matrizen

$$T' = D^{1/2} \, X^+ \, T \, X \, D^{-1/2}$$

bilden eine Darstellung:

$$T'(a) \, T'(b) = D^{1/2} \, X^+ \, T(a) \, X \, D^{-1/2} \;\; D^{1/2} \, X^+ \, T(b) \, X \, D^{-1/2}$$

$$= D^{1/2} \, X^+ \, T(a) \, X \, X^+ \, T(b) \, X \, D^{-1/2}$$

$$= D^{1/2} \, X^+ \, T(a) \, T(b) \, X \, D^{-1/2}$$

$$= D^{1/2} \, X^+ \, T(ab) \, X \, D^{-1/2}$$

$$= T'(ab)$$

und sind unitär:

$$T'^{+}T' = (D^{1/2}\, X^{+}\, T\, X\, D^{-1/2})^{+}\;\; D^{1/2}\, X^{+}\, T\, X\, D^{-1/2}$$

$$= \;D^{-1/2}\, X^{+}\, T^{+}\, X\, D^{1/2}\, D^{1/2}\, X^{+}\, T\, X\, D^{-1/2}$$

$$= \;D^{-1/2}\, X^{+}\, T^{+}\, X\, D\, X^{+}\, T\, X\, D^{-1/2}$$

$$= \;D^{-1/2}\, X^{+}\, T^{+}\, H\, T\, X\, D^{-1/2} \qquad ,$$

weil aus $X^{+} H X = D$ folgt: $H = X D X^{+}$.

Beachtet man noch, daß für beliebiges $g \in \mathbf{G}$

$$T^{+}\, H\, T = \Sigma_g\, T^{+}(a)\, T^{+}(g)\, T(g)\, T(a) = \Sigma_g\, T^{+}(g\, a)\, T(g\, a) = H\ ,$$

weil mit g auch g a alle Gruppenelemente durchläuft, dann wird

$$T'^{+}\, T' \;=\; D^{-1/2}\, X^{+}\, T^{+}\, H\;\; T\, X\, D^{-1/2}$$

$$= \;\; D^{-1/2}\, X^{+}\, H\;\; X\, D^{-1/2}$$

$$= \;\; D^{-1/2}\, D\, D^{-1/2}$$

$$= \;E \quad .$$

Also liefern die T' eine Darstellung und sie sind unitär.

w.z.b.w.

Übung: Man zeige, daß $x(g^{-1}) = x^{*}(g)$.

Mit den bisherigen Ergebnissen erhält man noch den für die Anwendung der Gruppentheorie <u>zentralen</u>

SATZ 27

Die Operatoren

$$P_i = (\dim T^i)\ (\Sigma_g\ (x^i(g))^*\ g)/\ \mathrm{Ord}\ \mathbf{G}$$

bilden ein maximales System orthogonaler Idempotente der Gruppenalgebra **G**'.

Zum **Beweis**, der dem Leser überlassen bleibe, ist zu zeigen, dass

1) $P_iP_j = 0;\ P_iP_i = P_i$ (orthogonal und idempotent),

(gelingt mit SATZ 20)

2) für ein beliebiges Gruppenelement g gilt

$P_ig = gP_i$ (d.h. $P_i \in$ **Z** von **G**')

(gelingt, weil konjugierte Elemente gleiche Charaktere haben)

3) die Summe $S = \Sigma_i P_i = E$

(gelingt mit SATZ 24)

ist.