8.3 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Eine Anwendung der Theorie der algebraischen Zahlkörper ist die Beantwortung der Frage, welche Strecken man in der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ ausschließlich mit Hilfe von Zirkel und (unmarkiertem) Lineal konstruieren kann.
Zur Präzisierung dessen, was hiermit gemeint ist, nehmen wir an, in der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ seien zwei Punkte gegeben, den einen identifizieren wir mit $(0,0)$, den anderen mit $(1,0)$. Es geht um die Frage, welche weiteren Punkte der Zeichenebene man in endlich vielen Schritten aus diesen beiden vorgegebenen Punkten konstruieren kann. Dabei sind folgende Schritte zur Konstruktion weiterer Punkte sind zugelassen:

- **Verwendung des Lineals:** Durch zwei vorgegebene oder bereits konstruierte Punkte kann man eine Gerade ziehen.

- **Benutzung des Zirkels:** Um einen vorgegebenen oder bereits konstruierten Punkt kann man einen Kreis mit der Länge einer zuvor bereits konstruierten Verbindungsstrecke als Radius schlagen.

Als *konstruierbare Punkte* bezeichnen wir Punkte von $\mathbb{R}^2$, die man in endlich vielen Schritten mit Hilfe dieser beiden Methoden erhalten kann. Neu hinzukommende Punkte sind also Schnittpunkte von Geraden mit Geraden, von Geraden mit Kreisen, oder auch von Kreisen mit Kreisen, ausgehend von den beiden vorgegebenen Punkten.
Die Konstruierbarkeit von Punkten der Zeichenebene formulieren wir zunächst um in die Konstruierbarkeit ihrer Koordinaten bzw. in die Konstruierbarkeit reeller Zahlen: Wir nennen die Zahl $r \in \mathbb{R}$ *konstruierbar*, wenn der Punkt $(r,0)$ auf die gerade beschriebene Weise konstruierbar ist. Es gilt natürlich:

8.3.1 $$r, s \in \mathbb{R} \text{ konstruierbar} \iff (r,s) \in \mathbb{R}^2 \text{ konstruierbar.}$$

Offenbar sind die natürlichen Zahlen konstruierbar, also auch die ganzen Zahlen und damit die rationalen Zahlen. Es gibt aber auch irrationale Zahlen, die leicht konstruiert werden können. Ein Beispiel ist $\sqrt{2}$, da $(0,1)$ und $(1,0)$ konstruierbar sind. Die Länge der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte ist nämlich $\sqrt{2}$. Allgemeiner kann man aus konstruiertem $r \in \mathbb{R}$ die Quadratwurzel $\sqrt{r}$ konstruieren.

8.3.2 Satz *Die konstruierbaren reellen Zahlen bilden einen Zwischenkörper von* $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$.

Beweis: Die aus der Schule bekannten Konstruktionen für Summe, Differenz, Produkt und Quotienten zeigen die Abgeschlossenheit der Menge konstruierbarer $r \in \mathbb{R}$ gegenüber den arithmetischen Operationen, sie bilden demnach einen Körper. Daß dieser Körper $\mathbb{Q}$ enthält, ist oben bereits erwähnt worden.

$\square$

8.3.3 Hilfssatz *Ist* $\mathbb{L}$ *der Zwischenkörper von* $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$*, der die Koordinaten bereits konstruierter Punkte enthält, aus denen r bzw.* $(r, 0)$ *in* einem *Schritt konstruiert werden kann, dann gilt:*

$$r \in \mathbb{L}(\sqrt{s}),\ 0 \leq s \in \mathbb{L} \textit{ geeignet.}$$

Beweis: Die Koordinaten von Schnittpunkten zweier Geraden sind Lösungen von linearen Gleichungen mit Koeffizienten in $\mathbb{L}$. Die Koordinaten von Schnittpunkten von Geraden mit Kreisen sind Lösungen von quadratischen Gleichungen mit Koeffizienten in $\mathbb{L}$, dies gilt auch für die Schnittpunkte von Kreisen mit Kreisen. Es bleibt deshalb nur noch zu bemerken, daß die Lösungen von $x^2 + px + q = 0$, mit $p, q \in \mathbb{L}$, bekanntlich die Zahlen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

sind, also von der Form $a + b\sqrt{s}$, mit $a, b, s \in \mathbb{L}$.

□

8.3.4 Satz *Eine reelle Zahl r ist genau dann konstruierbar, wenn es eine endliche Kette*

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{R}$$

von Zwischenkörpern von $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ *gibt mit*

$$\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}(\sqrt{r_i}),\ 0 \leq r_i \in \mathbb{K}_{i-1},$$

so daß insbesondere gilt:

$$r \in \mathbb{K}_n = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1}, \ldots, \sqrt{r_n}).$$

Beweis:
i) Die Existenz einer solchen endlichen Kette von Zwischenkörpern folgt induktiv aus dem Hilfssatz 8.3.3.
ii) Haben wir umgekehrt eine Kette

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{K}_{n-1} \subseteq \mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{R},$$

mit $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}(\sqrt{r_i})$ und $r_i \in \mathbb{K}_{i-1}$, so folgt (per Induktion nach n) aus der Konstruierbarkeit der Elemente von $\mathbb{K}_{i-1}$ die Konstruierbarkeit der Elemente von $\mathbb{K}_i$ wegen

$$\mathbb{K}_i = \{a + b\sqrt{r_i} \mid a, b \in \mathbb{K}_{i-1}\}.$$

$a + b\sqrt{r_i}$ ist konstruierbar, wenn a, b und r_i konstruierbar sind, denn $\sqrt{r_i}$ ist konstruierbar.

□

8.3.5 Folgerung

- *Ist $r \in \mathbb{R}$ konstruierbar, so liegt r in einem Zwischenkörper $\mathbb{K}$ von $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ mit $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 2^n$, für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$.*

- *Transzendente Zahlen (z.B. π) sind nicht konstruierbar (also ist insbesondere die "Quadratur des Kreises" nicht möglich: Die Strecke $\sqrt{\pi}$ ist* nicht konstruierbar*).*

- *Ist $r \in \mathbb{R}$ algebraisch und über $\mathbb{Q}$ von ungeradem Grad (wie z.B. $\sqrt[3]{2}$ mit dem Minimalpolynom $x^3 - 2$), dann ist r nicht konstruierbar und damit weder die Verdoppelung des Würfels ("Delisches Problem": konstruiere aus r die Strecke $r \cdot \sqrt[3]{2}$, deren dritte Potenz $2 \cdot r^3$ ist) noch die "Dreiteilung des Winkels" mit Zirkel und Lineal zu bewerkstelligen.*

Beweis: Die ersten beiden Behauptungen, und damit auch die Unlösbarkeit der Quadratur des Kreises, sind nach dem Vorangegangenen klar.
Die dritte Behauptung folgt aus der Tatsache, daß kein Zwischenkörper einer Erweiterung vom Grad 2^n einen ungeraden Grad haben kann. Das ergibt die Unlösbarkeit des Delischen Problems. Zur Dreiteilung des Winkels bemerken wir, daß $\cos 20^o$ nicht konstruierbar ist: Wegen $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ gilt, für $a := \cos 20^o$:

$$4a^3 - 3a = \frac{1}{2},$$

a ist also Wurzel von $f := 8x^3 - 6x - 1$, einem irreduziblen Polynom, denn

$$f((x+1)/2) = x^3 + 3x^2 - 3$$

ist irreduzibel nach Eisenstein. Somit gilt $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 3$. $\square$