5.8 Die Tensoralgebra

Ist $\mathbb{K}$ jetzt ein *beliebiger Körper*, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann können wir, wie im folgenden beschrieben wird, aus den Vektorräumen $\otimes^n V, n \in \mathbb{N}$, eine wichtige Algebra konstruieren.

5.8.1 Definition (graduierter Vektorraum) $(H, +)$ sei eine abelsche Halbgruppe. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum W heißt dann ein *H-graduierter Vektorraum*, wenn es zu jedem $h \in H$ einen Unterraum W_h gibt mit $W = \oplus_h W_h$. •

5.8.2 Beispiele

- Ist $(H, +)$ abelsche Halbgruppe und, für jedes $h \in H$, W_h ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann heißt der $\mathbb{K}$-Vektorraum

$$\prod_{h\in H} W_h := \{f\colon H \to \bigcup_{h\in H} W_h \mid \forall\, h \in H\colon f(h) \in W_h\}.$$

das *Produkt* der W_h, und

$$\coprod_{h\in H} W_h := \{f\colon H \to \bigcup_{h\in H} W_h \mid \forall\, h \in H\colon f(h) \in W_h,\ \text{fast alle } f(h) = 0\}$$

das *Coprodukt* (oder auch die *äußere direkte Summe* der W_h). Es gilt $\coprod W_h = \oplus \overline{W}_h$, mit

$$\overline{W}_h := \{f \in \coprod W_h \mid \forall\, h' \neq h\colon f(h') = 0\} \simeq_{\mathbb{K}} W_h.$$

- Gemäß den vorangegangenen Beispielen haben wir zu V den $\mathbb{N}$-graduierten $\mathbb{K}$-Vektorraum

$$T_0(V) := \coprod_{n\in\mathbb{N}} \overset{n}{\otimes} V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \overline{\overset{n}{\otimes} V} = \overline{\mathbb{K}} \oplus \overline{V} \oplus (\overline{V \otimes V}) \oplus \ldots,$$

das heißt:

$$T_0(V) = \{f\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{n}{\otimes} V \mid \forall\, n \in \mathbb{N}\colon f(n) \in \overset{n}{\otimes} V,\ \text{fast alle } f(n) = 0\}.$$

- Der Polynomring $\mathbb{K}[x]$ enthält die Unterräume ${}_{\mathbb{K}}\langle\langle x^n \rangle\rangle$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$\mathbb{K}[x] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \langle\langle x^n \rangle\rangle,$$

$\mathbb{K}[x]$ ist also ein $\mathbb{N}$-graduierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

◇

5.8.3 Definition (homogen, graduierte Algebra) $W = \bigoplus W_h$ sei H-graduierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- $w \in W$ heißt *homogen vom Grad* h, wenn $w \in W_h$. $U \leq W$ heißt *homogen*, wenn U von homogenen Elementen erzeugt wird.

- Ist W zudem noch eine $\mathbb{K}$-Algebra, d.h. ist eine Multiplikation definiert, so daß $(W, +, \cdot)$ zu einem Ring wird und

$$\kappa(ww') = (\kappa w)w' = w(\kappa w')$$

gilt, für alle $\kappa \in \mathbb{K},\ w, w' \in W$, dann heißt W eine H-*graduierte* $\mathbb{K}$-*Algebra*, wenn

$$W_h \cdot W_{h'} \subseteq W_{h+h'}.$$

Ein Ideal I heißt dabei *homogenes Ideal*, wenn es (als $\mathbb{K}$-Algebra) von homogenen Elementen erzeugt wird, d.h. wenn es homogene Elemente gibt, so daß jedes $i \in I$ eine Linearkombination aus endlichen Produkten dieser homogenen Elemente ist.

•

5.8.4 Beispiele

- $\mathbb{K}[x]$ ist eine $\mathbb{N}$-graduierte Algebra.

- $\{f \in \mathbb{K}[x] \mid \text{ Polynomgrad } f \leq 5\} \cup \{0\}$ ist homogener Unterraum, jedoch kein Ideal.

- Die Polynome mit lauter geraden Koeffizienten bilden ein homogenes Ideal.

◇

5.8.5 Definition (homogene Abbildung) Seien $V = \bigoplus V_h$ und $W = \bigoplus W_h$, beide H-graduiert, $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann heißt f *homogen vom Grad* h', wenn gilt

$$f(V_h) \subseteq W_{h+h'}.$$

•

5.8.6 Beispiele

- $f\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]\,,\ p \mapsto x^n \cdot p$ ist homogen vom Grad n.

- $\mathbb{K}[x]$ kann auch als $\mathbb{Z}$-graduierte $\mathbb{K}$-Algebra geschrieben werden:

$$\mathbb{K}[x] := \bigoplus_{z \in \mathbb{Z}} V_z,\ \ V_z := \langle\langle x^z \rangle\rangle,\ \text{falls } z \geq 0, V_z := \{0\},\ \text{falls } z < 0.$$

Die Differentiation $\frac{d}{dx}\colon\ \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ ist, als lineare Abbildung auf diesem $\mathbb{Z}$-graduierten $\mathbb{K}$-Vektorraums, homogen vom Grad -1.

◇

Wir wollen nun aus folgenden Vektorräumen V_q^p (zu gegebenen $\mathbb{K}$) eine graduierte Algebra bilden:

5.8.7 Definition (Raum der gemischten Tensoren) Seien V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, p, q natürliche Zahlen, dann setzen wir:

$$V_q^p := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{L(V) \otimes \ldots \otimes L(V)}_{q}.$$

Die Elemente dieses Tensorprodukts V_q^p heißen *p-fach kontravariante* und *q-fache kovariante* Tensoren. V_0^p heißt Raum der *p-fach kontravarianten*, V_q^0 der Raum der *$q-$fach kovarianten Tensoren.* Aus diesen Räumen bilden wir

$$T(V) := \coprod_{(p,q)} V_q^p = \bigoplus_{(p,q)} \overline{V_q^p},$$

den *Raum der gemischten Tensoren* über V. Er ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-graduiert. •

$T(V)$ soll nun zu einer $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-graduierten *Algebra* gemacht werden. Zu $(p, q), (p', q') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei zunächst

$$\nu: \overline{V_q^p} \times \overline{V_{q'}^{p'}} \to \overline{V_{q+q'}^{p+p'}}$$

definiert als bilineare Fortsetzung von

5.8.8 $$\nu(v^{\otimes} \otimes \lambda^{\otimes}, w^{\otimes} \otimes \mu^{\otimes}) := v^{\otimes} \otimes w^{\otimes} \otimes \lambda^{\otimes} \otimes \mu^{\otimes}.$$

Mit Hilfe dieser Abbildungen ν definieren wir die *Multiplikation*, also eine Abbildung

$$\nu: T(V) \times T(V) \to T(V)\,,\ (f, g) \mapsto \nu(f, g)$$

jetzt als distributive Fortsetzung, d.h. durch Angabe des Wertes von $\nu(f, g)$ an der Stelle $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie folgt:

$$\nu(f, g)((m, n)) := \sum_{\substack{p+p'=m \\ q+q'=n}} \nu(f(p, q), g(p', q')).$$

(Die Summe auf der rechten Seite dieser definierenden Gleichung ist endlich!) $T(V)$ zusammen mit der durch ν definierten Multiplikation heißt *die (gemischte) Tensoralgebra über V*. Durch Einschränkung erhält man daraus eine Multiplikation auf dem Unterraum

$$T_0(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \overline{V_0^p},$$

der Algebra der *kontravarianten* Tensoren, bzw. auf

$$T^0(V) = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} \overline{V_q^0},$$

der Algebra der *kovarianten* Tensoren.

5.8.9 Bemerkungen

- *In 5.8.8 wird zu je zwei Paaren* $(p,q),(p',q') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *ein* ν *definiert. Da* $T(V)$ *direkte Summe der* $\overline{V_q^p}$ *ist, wird dadurch eindeutig eine bilineare Abbildung* $\nu\colon T(V)\times T(V)\to T(V)$ *bestimmt.*
- $\nu(f,g)$ *hat höchstens endlich viele Werte* $\neq 0$.
- *Gilt* $x_i \in \overline{V_{q_i}^{p_i}}$, $i=1,2,3$, *dann haben wir*

$$\nu(x_1,\nu(x_2,x_3)) = \nu(\nu(x_1,x_2),x_3).$$

  Daraus folgt die Assoziativität von ν. *Die anderen Gesetze, z.B. die Distributivgesetze, folgen analog.*
- *Es gilt* $\nu(\overline{V_q^p}\times\overline{V_{q'}^{p'}}) \subseteq \overline{V_{q+q'}^{p+p'}}$. $T(V)$ *ist also eine* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-graduierte* $\mathbb{K}$*-Algebra.*

5.8.10 Beispiel

$$(2+v_1\otimes f_1+v_2\otimes v_3\otimes f_2)\otimes(v_4\otimes v_5\otimes f_3+f_4\otimes f_5)=$$

$$2(v_4\otimes v_5\otimes f_3)+2(f_4\otimes f_5)+v_1\otimes v_4\otimes v_5\otimes f_1\otimes f_3$$

$$+v_1\otimes f_1\otimes f_4\otimes f_5+v_2\otimes v_3\otimes v_4\otimes v_5\otimes f_2\otimes f_3+v_2\otimes v_3\otimes f_2\otimes f_4\otimes f_5.$$

◇

5.8.11 Definition Die Unteralgebren

$$T_0(V) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_0^n},\ \text{bzw. } T^0(V) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n^0}.$$

heißen die Algebren der *kontravarianten* bzw. der *kovarianten* Tensoren über V.

•