4.2 Die adjungierte Abbildung

Die Vektorräume dieses Paragraphen seien sämtlich euklidisch, die Norm kommt jetzt also vom inneren Produkt her,

$$\|v\| = \sqrt{\langle v \mid v\rangle}.$$

Zu $f \in Hom_{\mathbb{R}}(V,W)$ und $w \in W$ ist $\langle f(-) \mid w\rangle \in L(V)$, nach dem Rieszschen Darstellungssatz (4.1.31) gibt es also genau ein $v \in V$ mit

$$\langle f(-) \mid w\rangle = \langle - \mid v\rangle.$$

Die Zuordnung $w \mapsto v$ definiert also eine Abbildung $\tilde{f}$, und diese ist offenbar auch linear. Wir nennen sie die zu f *adjungierte* Abbildung, und sie erfüllt die folgende Gleichung, bzw. ist durch diese definiert:

4.2.1 $$\langle f(v) \mid w\rangle = \langle v \mid \tilde{f}(w)\rangle.$$

4.2.2 Hilfssatz *Die zu $f \in Hom_{\mathbb{R}}(V,W)$ adjungierte Abbildung $\tilde{f}$ hat die folgenden Eigenschaften:*

1. *f ist die adjungierte Abbildung zu $\tilde{f}$,*
2. *$W = \mathrm{Bild}(f) \oplus \mathrm{Kern}(\tilde{f})$,*
3. *Sind $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Orthonormalbasisfolgen für V, W, dann gilt*
$$M(\mathcal{C}, f, \mathcal{B}) = {}^tM(\mathcal{B}, \tilde{f}, \mathcal{C}).$$
4. *Ist $V = W, g \in End_{\mathbb{R}}(V)$, dann ist $\widetilde{f \circ g} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$, und irgend zwei Eigenvektoren v von f und $\tilde{v}$ von $\tilde{f}$ zu verschiedenen Eigenwerten κ und $\tilde{\kappa}$ sind orthogonal.*

Beweis:

1. $\langle f(v) \mid w\rangle = \langle v \mid \tilde{f}(w)\rangle = \langle \tilde{\tilde{f}}(v) \mid w\rangle$ ergibt $f = \tilde{\tilde{f}}$, da $\langle - \mid -\rangle$ nicht ausgeartet ist.
2. Folgt aus $\mathrm{Bild}(f)^\perp = \mathrm{Kern}(\tilde{f})$ mit 4.1.18.
3. Ist $A := M(\mathcal{C}, f, \mathcal{B})$, $\tilde{A} := M(\mathcal{B}, \tilde{f}, \mathcal{C})$, dann gilt
$$a_{jk} = \sum_i a_{ik}\langle c_i \mid c_j\rangle = \langle f(b_k) \mid c_j\rangle = \langle b_k \mid \tilde{f}(c_j)\rangle = \sum_i \tilde{a}_{ij}\langle b_k \mid b_i\rangle = \tilde{a}_{kj}.$$
4. $\langle (f \circ g)(v) \mid w\rangle = \langle g(v) \mid \tilde{f}(w)\rangle = \langle v \mid (\tilde{g} \circ \tilde{f})(w)\rangle$. Außerdem gilt für Eigenvektoren $v, \tilde{v}$ zu Eigenwerten $\kappa, \tilde{\kappa}$:
$$\begin{aligned}(\kappa - \tilde{\kappa})\langle v \mid \tilde{v}\rangle &= \langle \kappa v \mid \tilde{v}\rangle - \langle v \mid \tilde{\kappa}\tilde{v}\rangle \\ &= \langle f(v) \mid \tilde{v}\rangle - \langle v \mid \tilde{f}(\tilde{v})\rangle \\ &= \langle v \mid \tilde{f}(\tilde{v})\rangle - \langle v \mid \tilde{f}(v)\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sind die beiden Eigenwerte verschieden, so folgt daraus $\langle v \mid \tilde{v}\rangle = 0$. □

4.2.3 Satz *Ist V euklidisch, dann gilt*

$$\varphi\colon End_{\mathbb{R}}(V) \simeq_{\mathbb{R}} BLF(V),\ f \mapsto \langle f(-) \mid -\rangle.$$

Beweis. Die Linearität von φ ist trivial. Die Injektivität folgt aus der Tatsache, daß $\langle f(-) \mid -\rangle\colon v \mapsto 0$ impliziert, daß f die Nullabbildung ist, denn dies bedeutet ja

$$\forall\ u, v \in V\colon\ \langle f(u) \mid v\rangle = 0,$$

also $f(u)$ im Nullraum und demnach $f(u) = 0$, für alle u, d. h. $f = 0$.
Die Surjektivität folgt so: Für $\Phi \in BLF(V), v \in V$, gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz genau ein $u \in V$ mit

$$\Phi(v, -) = \langle u \mid -\rangle.$$

Damit ist $f\colon v \mapsto u$ wohldefiniert, und es gilt dafür offenbar $\varphi(f) = \Phi$. □

4.2.4 Beispiele
i) Ist $V := \mathbb{R}^n$ und $\langle - \mid -\rangle$ das Standardskalarprodukt, dann kann man die Werte von $\Phi := \langle f(-) \mid -\rangle \in BLF(V)$ mit Hilfe der Matrix $A := M(\mathcal{E}, f, \mathcal{E})$ berechnen:

$$\langle f(u) \mid v\rangle = \sum_i f(u)_i v_i = \sum_{i,k} a_{ik} u_k v_i = {}^t v \cdot A \cdot u.$$

Die Matrix A bezeichnen wir deshalb auch mit

$$M^{\Phi}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}.$$

ii) Für $\tilde{\Phi} := \varphi(\tilde{f})$ (nach 4.2.3) gilt

$$\tilde{\Phi}(v, w) = \langle \tilde{f}(v) \mid w\rangle = \langle v \mid f(w)\rangle = \langle f(w) \mid v\rangle = \Phi(w, v).$$

Die zur adjungierten Abbildungen gemäß 4.6.3 gehörende Bilinearform erhält man also durch Vertauschen der Argumente. ◇

◇

4.2.5 Definition (normal) $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ heißt *normal,* wenn gilt

$$f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f.$$

•

4.2.6 Hilfssatz $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$, *dann sind äquivalent.*

1. *f ist normal,*
2. $\langle f(v) \mid f(w)\rangle = \langle \tilde{f}(v) \mid \tilde{f}(w)\rangle$.
3. $\|f(v)\|^2 = \|\tilde{f}(v)\|^2$.

Beweis: Nachrechnen. □

4.2.7 Hilfssatz *Ist $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ normal, dann gilt*

1. $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(\tilde{f})$,
2. $V = \mathrm{Bild}(f) \oplus \mathrm{Kern}(f)$,
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(f^n)$,
4. $\widetilde{f - \rho \cdot id_V} = \tilde{f} - \rho \cdot \mathrm{id}_V$,
5. $f - \rho \cdot id_V$ *ist normal.*
6. f *und* $\tilde{f}$ *haben dieselben Eigenwerte und Eigenvektoren.*

Beweis:

1. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus 4.2.6 iii).
2. Die zweite Behauptung ergibt sich aus 4.2.2 ii) mit der gerade bewiesenen ersten Behauptung.
3. Aus 1. folgt, daß die Einschränkung $f \downarrow \mathrm{Bild}(f)$ regulär ist. Es folgt
$$\mathrm{Rang}(f^2) = \dim(f(\mathrm{Bild}(f))) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Rang}(f),$$
und ganz analog ergibt sich $\mathrm{Rang}(f^3) = \mathrm{Rang}(f)$, usw.
4. Nachrechnen.
5. Nachrechnen.
6. Die Gleichungen
$$\mathrm{Kern}(f - \rho \cdot \mathrm{id}_V) = \mathrm{Kern}(\widetilde{f - \rho \cdot \mathrm{id}_V}) = \mathrm{Kern}(\tilde{f} - \rho \cdot \mathrm{id}_V)$$
ergeben die Identität der entsprechenden Eigenräume:
$$E_f(\rho) = E_{\tilde{f}}(\rho).$$

□

4.2.8 Satz *Sei $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ und $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit paarweise orthogonalen V_i (d.h. $V_i \subseteq V_j^{\perp}$, falls $i \neq j$), kurz:*

$$V = V_1 \perp \ldots \perp V_r.$$

Sind zudem die V_i invariant unter f, d.h. $f(V_i) \subseteq V_i$, dann ist f genau dann normal, wenn die V_i auch unter den $\tilde{f}_i$ (zu $f_i := f \downarrow V_i$) invariant und die f_i normal sind. □

Beweis:
i) Sei f normal. Wir zeigen zunächst die Invarianz $\tilde{f}_i(V_i) \subseteq V_i$: Ist $v_j \in V_j, j \neq i$, dann gilt

$$\langle v_j \mid \tilde{f}(v_i)\rangle = \langle f(v_j) \mid v_i\rangle = 0,$$

also, für alle $j \neq i$: $\tilde{f}(v_i) = \tilde{f}_i(v_i) \in V_j^\perp$, und damit

$$\tilde{f}_i(v_i) \in \bigcap_{j\neq i} V_j^\perp = V_i.$$

Zum Nachweis der Normalität von f_i beachten wir, daß

$$\|f_i(v_i)\|^2 = \|f(v_i)\|^2 = \|\tilde{f}(v_i)\|^2 = \|\tilde{f}_i(v_i)\|^2.$$

Daraus folgt die Normalität von f_i nach 4.2.6.
ii) Jetzt seien umgekehrt die f_i normal und die V_i invariant unter den $\tilde{f}_i$. Ist $v = \sum_1^r v_i$, mit $v_i \in V_i$, dann gilt

$$\|f(v)\|^2 = \|\sum_i f_i(v_i)\|^2 = \sum_i \|f_i(v_i)\|^2,$$

letzteres wegen $f_i(v_i) \in V_i \perp V_j, j \neq i$. Da die f_i als normal vorausgesetzt sind, gilt weiter:

$$= \sum_i \|\tilde{f}_i(v_i)\|^2 = \|\tilde{f}(v)\|^2,$$

also ist auch f normal. □

Wir nennen $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ natürlich genau dann *selbstadjungiert,* wenn

$$\tilde{f} = f$$

gilt. Unmittelbar aus 4.2.2 ergibt sich für solche Abbildungen, daß sie bzgl. Orthonormalbasisfolgen $\mathcal{B}$ durch symmetrische Matrizen dargestellt werden:

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = {}^tM(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}).$$

Eines unserer Ziele ist der Nachweis der Tatsache, daß selbstadjungierte lineare Endomorphismen eines n-dimensionalen euklidischen Raumes n paarweise orthogonale Eigenvektoren besitzen. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\varphi: V\backslash\{0_V\} \to \mathbb{R}, v \mapsto \frac{\langle v \mid f(v)\rangle}{\langle v \mid v\rangle}.$$

4.2.9 Bemerkungen Diese Funktion φ hat die folgenden Eigenschaften:

- $\forall\ \rho \in \mathbb{R}^*, v \in V\colon\ \varphi(\rho v) = \varphi(v)$.
- Ist $\mathcal{B}$ eine ON-Basisfolge, $A := M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$, dann gilt

  $$\langle v \mid f(v)\rangle = \sum_{i,k} a_{ik} v_i v_k,$$

  $v \mapsto \langle v \mid f(v)\rangle$ ist also eine Polynomabbildung und demnach stetig. Dies gilt natürlich insbesondere für $v \mapsto \langle v \mid v\rangle$.

- Als Quotient stetiger Funktionen nimmt φ auf der *Einheitssphäre,* d.h. auf der Menge $\{v \mid \|v\| = 1\}$, ein Minimum an, etwa bei $b_0 \in V$, d.h. es gilt
$$\|v\| = 1 \Longrightarrow \varphi(v) \geq \varphi(b_0).$$
- Mit dem ersten Punkt folgt dann weiter:
$$\forall\ v \in V\backslash\{0_V\}\colon\ \varphi(v) \geq \varphi(b_0).$$

◇

4.2.10 Hilfssatz b_0 *ist Eigenvektor von* f *zum Eigenwert* $\langle b_0 \mid f(b_0)\rangle$.

Beweis: Sei $v \in V$ und
$$\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(b_0 + xv).$$
Nach 4.2.9 nimmt ψ an der Stelle $x = 0$ ein Minimum an, es gilt also $\psi'(0) = 0$. Einsetzen der Definition von φ und Differenzieren nach x ergibt
$$\psi'(0) = 2\langle b_0 \mid f(v)\rangle - 2\langle b_0 \mid f(b_0)\rangle\langle b_0 \mid v\rangle.$$
Setzen wir dies gleich Null, so folgt
$$0 = \langle f(b_0) - \langle b_0 \mid f(b_0)\rangle b_0 \mid v\rangle,$$
und zwar für *alle* $v \in V$. Das impliziert
$$f(b_0) = \langle b_0 \mid f(b_0)\rangle b_0,$$
wie behauptet.

□

4.2.11 Satz *Zu jedem selbstadjungierten linearen Endomorphismus* f *eines euklidischen Vektorraums gibt es eine Orthonormalbasisfolge aus Eigenvektoren.*

Beweis: f besitzt nach 4.2.10 einen Eigenvektor b_0. Wir betrachten die orthogonale Zerlegung
$$V = \langle b_0\rangle \perp \langle b_0\rangle^\perp$$
und verwenden, daß $f\langle b_0\rangle^\perp \subseteq \langle b_0\rangle^\perp$:
$$\forall\ v \in \langle b_0\rangle^\perp\colon\ \langle b_0 \mid f(v)\rangle = \langle f(b_0) \mid v\rangle = \langle b_0 \mid f(b_0)\rangle \cdot \langle b_0 \mid v\rangle = 0.$$
Mit f ist auch die Einschränkung $f \downarrow \langle b_0\rangle^\perp$ selbstadjungiert, obige Überlegungen ergeben also einen Eigenvektor der Norm 1 in $\langle b_0\rangle^\perp$ usw. Die Behauptung folgt also per Induktion nach der Dimension von V.

□

Selbstadjungierte lineare Abbildungen auf euklidischen Vektorräumen werden, wie wir wissen, durch symmetrische Matrizen beschrieben, es gilt aber auch die Umkehrung: Reell symmetrische Matrizen A beschreiben selbstadjungierte Abbildungen f, z.B. kann man f durch $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) := A$ definieren mit irgendeiner ON-Basisfolge $\mathcal{B}$. Man rechnet leicht nach, daß dieses f selbstadjungiert ist. Es ergeben sich also die

4.2.12 Folgerungen

1. *Reelle symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.*

2. *Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, dann hat A lauter reelle Eigenwerte λ_i, für diese gilt*
$$p_A = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1}(x-\lambda_i).$$

3. *Zu jeder symmetrischen Bilinearform auf einem euklidischen Vektorraum V gibt es eine Orthonormalbasisfolge $\mathcal{B}$ in V, bzgl. derer die Form durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.*

□

Die Transformation auf Diagonalgestalt bezeichnet man auch als *Hauptachsen-transformation,* wir werden auf Anwendungen (wie z.B. die Klassifizierung von Kegelschnitten) noch zu sprechen kommen.

4.2.13 Definition (Projektion,Orthogonalprojektion) Ein linearer Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ eines Vektorraumes heißt *Projektion,* wenn $f^2 = f$ gilt. Ein Projektion heißt *Orthogonalprojektion,* wenn sie selbstadjungiert ist. •

4.2.14 Hilfssatz *Ist $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ ein Projektion, dann gilt*
$$V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f),$$
und
$$f = 0_{\mathrm{Kern}(f)} \oplus \mathrm{id}_{\mathrm{Bild}(f)}.$$
Ist f darüberhinaus selbstadjungiert, also eine Orthogonalprojektion, dann ist f normal. Umgekehrt ist jede normale Projektion eine Orthogonalprojektion.

Beweis:

i) Ist f Projektion, d.h. $f^2 = f$, dann ist zunächst die Summe $\mathrm{Kern}(f)+\mathrm{Bild}(f)$ direkt: $v \in \mathrm{Kern}(f)\cap\mathrm{Bild}(f)$, etwa $v = f(w)$, ergibt $0 = f(v) = f^2(w) = f(w) = v$. Diese direkte Summe ist darüberhinaus gleich V : Für $v \in V$ gibt es $w \in V$ mit $v = f(v) + w$, denn V ist eine additive Gruppe. Der Summand w liegt im $\mathrm{Kern}(f)$, da $f(v) = f^2(v) + f(w) = f(v) + f(w)$. Jedes $v \in V$ ist demnach als Summe aus einem Element des Kerns und einem Element des Bildes darstellbar. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

ii) Der zweite Teil, die Beschreibung von f als Summe aus der Nullabbildung auf dem Kern und der identischen Abbildung auf dem Bild von f folgt direkt aus dem ersten Teil, denn dieser liefert die Zerlegung in Nullabbildung auf dem Kern und der Einschränkung auf das Bild, und die Gleichung $f^2 = f$ zeigt noch, daß diese Einschränkung gleich der identischen Abbildung ist.

iii) Die Normalität jeder Othogonalprojektion f ist trivial:
$$\tilde{f} \circ f = f \circ f = f \circ \tilde{f},$$

da f selbstadjungiert ist.

iv) Ist umgekehrt f normale Projektion, $v \in V$ und wieder $v = f(v) + w, w \in$ Kern(f), dann gilt

$$\langle v \mid f(u)\rangle = \langle f(v) + w \mid f(u)\rangle = \langle f(v) \mid f(u)\rangle,$$

letzteres wegen $w \in \text{Kern}(f) = \text{Kern}(\tilde{f})$. Analog ergibt sich

$$\langle f(v) \mid u\rangle = \langle f(v) \mid f(u)\rangle,$$

also insgesamt

$$\langle v \mid f(u)\rangle = \langle f(u) \mid v\rangle.$$

Das liefert $\tilde{f} = f$, wie behauptet.

□

4.2.15 Hilfssatz

1. *Ist U ein Unterraum von V, dann gibt es genau eine Orthogonalprojektion $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ mit* Bild$(f) = U$, *nämlich* $f := \text{id}_U \oplus 0_{U^\perp}$.
2. *Sind $U_1, U_2 \leq_{\mathbb{R}} V$ und f_1, f_2 die zugehörigen Orthogonalprojeektionen gemäß i), dann gilt:*
   - $f_2 \circ f_1 = 0 \iff U_1 \perp U_2$,
   - $f_1 + f_2$ *ist Orthogonalprojektion* $\iff U_1 \perp U_2$,
   - $f_1 - f_2$ *ist Orthogonalprojektion* $\iff U_2 \subseteq U_1$,
   - $f_1 \circ f_2$ *ist Orthogonalprojektion* $\iff f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

4.2.16 Definition (schiefsymmetrisch) $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ heißt *schiefsymmetrisch,* wenn $\tilde{f} = -f$ gilt. •

4.2.17 Folgerung *Ist f schiefsymmetrisch und $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasisfolge, dann gilt*

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = -\,{}^tM(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}),$$

d.h. die f darstellende Matrix ist schiefsymmetrisch.

□

Offensichtlich richtig ist

4.2.18 Hilfssatz

i) Ist $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$, dann sind äquivalent:

1. *f ist schiefsymmetrisch,*
2. $\langle f(v) \mid w\rangle + \langle v \mid f(w)\rangle = 0$,

3. $\langle v \mid f(v)\rangle = 0$.

ii) Ist $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ *schiefsymmetrisch, dann gilt:*

1. 0 ist ggf. der einzige Eigenwert von f,

2. $Spur f = 0$,

3. $\det(f) = (-1)^{dim(V)} \det(f)$,

4. $dim_{\mathbb{R}}(V)$ *ungerade* $\Longrightarrow \det(f) = 0$,

5. $Rg(f)$ *ist gerade.*

iii) Der Rang jeder schiefsymmetrischen Matrix ist gerade.

□

4.2.19 Satz *Ist* $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ *schiefsymmetrisch, dann gibt es eine Orthonormalbasisfolge* $\mathcal{B}$ *und reelle Zahlen* κ_i *mit*

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_0 & & & 0 \\ \kappa_0 & 0 & & & \\ & & 0 & -\kappa_1 & \\ & & \kappa_1 & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

□

Beweis: Die Abbildung $\varphi := f^2$ ist selbstadjungiert, es gibt also eine 0N-Basisfolge $\mathcal{C} = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ aus Eigenvektoren von φ, sei etwa $\varphi(c_i) = \lambda_i c_i$.

Wir zeigen zunächst, daß $\lambda_i \leq 0$: Da die c_i Vektoren mit Norm 1 sind, gilt

$$\lambda_i = \langle c_i \mid \varphi(c_i)\rangle = \langle c_i \mid f^2(c_i)\rangle = -\langle f(c_i) \mid f(c_i)\rangle \leq 0.$$

Rang(φ) ist gerade, denn Rang(φ) = Rang(f^2) = Rang(f), und letzterer ist nach **??** gerade.

Die Anzahl der negativen Eigenwerte von φ gleicht dem Rang von φ, ist also gerade. $c_0, \ldots, c_{2s-1}$ seien die zugehörigen Eigenvektoren. Setzen wir jetzt

$$b_{2\nu+1} := c_\nu, b_{2\nu} := \sqrt{-\lambda_\nu^{-1}} \cdot f(c_\nu), 0 \leq \nu \leq s-1,$$

und

$$b_\nu := c_\nu, \nu \geq 2s,$$

dann hat die Basisfolge $\mathcal{B}$ offenbar die gewünschten Eigenschaften, mit $\kappa_i := \sqrt{-\lambda_\nu}$, wie man leicht nachrechnet:

$$f(b_{2\nu+1}) = f(c_\nu) = \sqrt{-\lambda_\nu} \cdot b_{2\nu} = \kappa_\nu b_{2\nu},$$

$$f(b_{2\nu}) = f(\sqrt{-\lambda_\nu^{-1}} \cdot f(c_\nu)) = \sqrt{-\lambda_\nu} \cdot f^2(b_{2\nu}) = -\kappa_\nu b_{2\nu+1},$$

□