2.2 Operationen von Gruppen

In diesem Paragraphen wollen wir zeigen, wie Gruppen zur Definition, Abzählung und Konstruktion vieler Strukturen aus Mathematik und Naturwissenschaften benutzt werden können, wenn diese Strukturen als Äquivalenzklassen auf endlichen Mengen definiert sind. Ein Beispiel ist oben bereits erwähnt worden, die unnumerierten Graphen wurden als Äquivalenzklassen numerierter eingeführt. Die vorgesehene Anwendung von Gruppen auf Probleme dieser Art ermöglicht beispielsweise die *Abzählung* von Äquivalenzklassen, also u. a. die Bestimmung der Anzahl unnumerierter Graphen mit vorgegebener Punktezahl. Man kann mit Hilfe der Gruppenoperation sogar Repräsentanten der Äquivalenzklassen *konstruieren,* worauf aber zunächst nicht eingegangen werden kann.

2.2.1 Definition (Operationen von Gruppen auf Mengen) Sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe, M eine nicht leere Menge. Man sagt, G *operiere* auf M oder M sei eine *$G-$Menge,* wenn eine Abbildung

$$G \times M \to M \colon (g, m) \mapsto gm$$

gegeben ist mit

$$g(g'm) = (gg')m, 1m = m.$$

Dies, also die Vorgabe von G, M und einer solchen Abbildung, wird auch mit

$$_GM$$

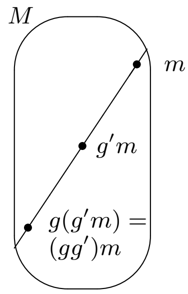
abgekürzt, weil hier G *von links* auf M operiert. Ganz entsprechend kann man natürlich Operationen *von rechts* definieren. •

Wir bemerken zunächst, daß jede Operation $_GM$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert:

$$m \sim_G m' :\iff \exists\, g \in G\colon\ gm = m'.$$

Daß dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist, d.h. daß $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, ergibt sich leicht mit Hilfe der folgenden Äquivalenz, die unmittelbar aus der Definition von $\sim$ folgt:

2.2.2 $$gm = m' \iff m = g^{-1}m'.$$



Die Klassen dieser Relation, also die Mengen

$$G(m) := \{gm \mid g \in G\}$$

heißen die *Bahnen* von G auf M. Als Äquivalenzklassen sind zwei Bahnen $G(m)$ und $G(m')$ entweder gleich oder disjunkt. Die Menge *aller* Bahnen wollen wir mit

$$G \backslash\!\backslash M := \{G(m) \mid m \in M\}$$

bezeichnen.

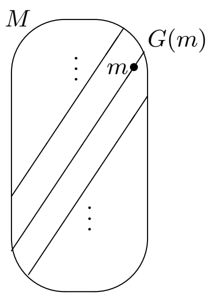
2.2.3 Beispiel Ist n eine positive natürliche Zahl und

$$T := \{t \in \mathbb{N} \mid t \text{ teilt } n\}$$

die Menge der Teiler von n, dann betrachten wir die Abbildung

$$\sigma \colon T \to T, t \mapsto n/t.$$

Für sie gilt $\sigma^2 = \mathrm{id}_T$, sie besitzt demnach Links- und Rechtsinverse, liegt also in S_T, und es folgt auch $\langle\sigma\rangle = \{1, \sigma\}$. Die Bahnen dieser Gruppe sind die Mengen $\{t, n/t\}$, sie sind also von der Ordnung oder *Länge* 2 oder 1. Und es gibt genau dann eine (und dann auch *nur* eine) Bahn der Länge 1, wenn es einen Teiler t gibt mit $t = n/t$, d.h. mit $n = t^2$, also wenn n eine Quadratzahl ist. Mit Hilfe dieser Operation und der Betrachtung ihrer Bahnen haben wir also die Aussage bewiesen, daß positive natürliche Zahlen genau dann ungeradzahlig viele Teiler besitzen, wenn sie Quadrate sind. ◇



Ein Repräsentantensystem T von $G \backslash\!\backslash M$, eine sogenannte *Transversale* von $G \backslash\!\backslash M$, liefert also eine vollständige Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen, eine *Partition* von M :

$$M = \dot{\bigcup}_{m \in T} G(m).$$

Es gilt auch die Umkehrung: Jede Äquivalenzrelation bzw. partition einer Menge X kann als Bahnenmenge einer geeigneten Gruppenoperation beschrieben werden:

2.2.4 Folgerung *Besitzt eine Mengen M eine Partition in disjunkte, nicht leere Teilmengen $M_i, i \in I$, dann sind die M_i die Bahnen der Gruppe*

$$\bigoplus_{i \in I} S_{M_i} := \{\pi \in S_M \mid \forall\ i \colon\ \pi(M_i) = M_i\}.$$

Jede mathematische Struktur, die als Äquivalenzklasse definiert ist, kann also als Bahn einer Gruppe verstanden werden.

Neben diesen Bahnen der Elemente von M definiert die vorgegebene Operation noch *Untergruppen* von G, und zwar zu jedem $m \in M$:

$$G_m := \{g \in G \mid gm = m\}$$

heißt der *Stabilisator* von m. Die Untergruppeneigenschaft von G_m folgt aus leicht aus 2.2.2. Betrachten wir einige Beispiele wichtiger Strukturen aus der Algebra, die sich als Bahnen bzw. als Stabilisatoren erweisen:

2.2.5 Anwendungen (Nebenklassen, Konjugiertenklassen, Zentralisatoren)

- Ist U eine Gruppe von G, dann operiert diese per Linksmultiplikation auf G :
$$U \times G \to G, (u, g) \mapsto ug.$$
Bahnen sind hier die Mengen
$$U(g) = Ug = \{ug \mid u \in U\},$$
die sogenannten *Rechtsnebenklassen* von U in G (dabei haben wir einfachheitshalber Ug für das Komplexprodukt $U \cdot \{g\}$ geschrieben).
Die Menge aller Bahnen bzw. Rechtsnebenklassen bezeichnen wir mit
$$U\backslash G := \{Ug \mid g \in G\}.$$
Bei analoger Operation von U auf G per Rechtsmultiplikation ergeben sich als Bahnen die *Linksnebenklassen*
$$gU = \{gu \mid u \in U\}.$$
Entsprechend ist die Menge aller Bahnen bzw. Linksnebenklassen
$$G/U := \{gU \mid g \in G\}.$$
Bei der Linksmultiplikation ist der Stabilisator von g offenbar die Untergruppe $\{1\}$, ebenso bei der Rechtsmultiplikation.

Als erstes Ergebnis erhalten wir demnach, daß sowohl die Rechtsnebenklassen, als auch die Linksnebenklassen einer Untergruppe U von G eine Partition von G bilden.
Ein konkretes Beispiel ist übrigens die oben bereits erwähnte Beschreibung der Lösungsgesamtheit eines inhomogenen Systems linearer Gleichungen. Setzt man nämlich $G := \mathbb{R}^n$ und $U := L_H$, dann operiert diese (Untergruppe) L_H auf $\mathbb{R}^n$, und die Bahn (irgendeiner) speziellen Lösung x des inhomogenen Systems ist die Nebenklasse (Links- oder Rechts- braucht hier wegen der Kommutativität nicht unterschieden zu werden)
$$L_I = x + L_H.$$

- Eine interessante Operation von G auf sich selbst ist die sogenannte *Konjugation:*
$$G \times G \to G: (g', g) \mapsto g'gg'^{-1}.$$
Die Bahn von g ist die Menge
$$\{g'gg'^{-1} \mid g' \in G\},$$
die *Konjugiertenklasse* von g, wir bezeichnen sie mit $C^G(g)$.
Der Stabilisator von g ist die Untergruppe
$$\{g' \in G \mid g'gg'^{-1} = g\},$$
die wir mit $C_G(g)$ abkürzen, sie heißt auch der *Zentralisator* von g.

Wir erhalten daraus als weiteres Ergebnis, daß auch die Konjugiertenklassen von Elementen der Gruppe eine Partition der Gruppe bilden, und daß die Zentralisatoren Untergruppen sind. $\diamond$

Einen wichtigen Spezialfall bilden die Konjugiertenklassen der symmetrischen Gruppe S_n. Zur Berechnung der Klasse von $\rho \in S_n$ bemerken wir, daß — unter Verwendung der Abkürzung $\binom{i}{\sigma(i)}$ für σ — die Gleichungen

$$\begin{aligned}\pi\rho\pi^{-1} &= \begin{pmatrix} i \\ \pi(i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ \rho(i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi(i) \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \pi(i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi(i) \\ \rho(i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho(i) \\ \pi(\rho(i)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi(i) \\ \rho(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(i) \\ \pi(\rho(i)) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß $\pi\rho\pi^{-1}$ aus ρ durch Anwendung der Abbildung π auf die Ziffern in den zyklischen Faktoren von ρ entsteht: Aus

$$\rho = \ldots(\ldots i\ \rho(i)\ldots)\ldots,$$

der Zykelschreibweise für ρ, ergibt sich

$$\pi\rho\pi^{-1} = \ldots(\ldots\pi(i)\ \pi(\rho(i))\ldots)\ldots.$$

Die zyklischen Faktoren des zu ρ konjugierten Elements $\pi\rho\pi^{-1}$ haben also dieselben Längen wie die zyklischen Faktoren von ρ.

Umgekehrt sind zwei Permutationen mit denselben Längen der zyklischen Faktoren zueinander konjugiert: Ist nämlich

$$\rho = \ldots(\ldots i\ \rho(i)\ldots)\ldots,$$

$$\sigma = \ldots(\ldots j\ \sigma(j)\ldots)\ldots,$$

dann gilt, für

$$\pi := \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & i & \rho(i) & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & j & \sigma(j) & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$\pi\rho\pi^{-1} = \sigma,$$

ρ und σ sind demnach konjugiert.

2.2.6 Folgerung *Bedeutet $\alpha(\pi) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ die schwach monoton fallende Folge der Längen der zyklischen Faktoren von $\pi \in S_n$, dann sind ρ und σ genau dann konjugiert, wenn $\alpha(\rho) = \alpha(\sigma)$. Die schwach monoton fallenden Folgen $\alpha(\pi) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ natürlicher Zahlen α_i mit $\sum_i \alpha_i = n$ charakterisieren demnach die Konjugiertenklassen von S_n. (Man nennt solche monoton fallenden Folgen natürlicher Zahlen, deren Summe n ergibt, auch* Partitionen *oder genauer* Zahlpartitionen *von n und $\alpha(\pi)$ die* Zykelpartition *von π.)* $\square$

Beispielsweise sind (4), $(3,1)$, $(2^2) := (2,2)$, $(2,1^2)$ und (1^4) die Zykelpartitionen, die die Klassen von S_4 charakterisieren.
Mit Hilfe der — gerade als Bahnen beschriebenen — Linksnebenklassen von Untergruppen können wir jetzt ein grundlegendes Resultat über den Zusammenhang zwischen Bahnen und Stabilisatoren formulieren und beweisen:

2.2.7 Das Fundamentallemma *Ist*

$$G \times M \to M, (g,m) \mapsto gm$$

eine Operation von G auf M, dann ist, für jedes Element m von M, die Bahn von m auf natürliche Weise bijektiv zur Menge der Linksnebenklassen von G_m :

$$G(m) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow G/G_m, gm \mapsto gG_m.$$

Insbesondere gilt also, daß die Länge der Bahn von m gleich der Anzahl der Linksnebenklassen des Stabilisators von m ist,

$$|G(m)| = |G/G_m|,$$

wenn, wie üblich, G/G_m die Menge der Linksnebenklassen von G_m in G bezeichnet.

Beweis: Wir betrachten folgende Kette von Äquivalenzen:

$$gm = g'm \iff g^{-1}g'm = m \iff g^{-1}g' \in G_m \iff gG_m = g'G_m.$$

Liest man dies von links nach rechts, so ergibt sich die Wohldefiniertheit von $gm \mapsto gG_m$. Liest man von rechts nach links, so ergibt sich die Injektivität, die Surjektivität ist trivial.
Die einzelnen Äquivalenzen ergeben sich wie folgt:

i) Die erste folgt mit den beiden Bedingungen aus der Definition einer Operation.

ii) Die zweite Äquivalenz folgt aus der Definition des Stabilisators.

iii) Die dritte Äquivalenz benutzt eine einfache, aber sehr wichtige Überlegung, die im folgenden in vielen Fällen benutzt werden wird. Sie ist unmittelbar aus der Definition von Links- bzw. Rechtsnebenklassen ersichtlich: $g^{-1}g' \in G_m$ bedeutet die Existenz eines $g'' \in G_m$ mit $g^{-1}g' = g''$, was dasselbe ist wie $g' = gg''$ bzw. wie $g' \in gG_m$. Da verschiedene Linksnebenklassen disjunkt sind, ist das aber äquivalent zu $g'G_m = gG_m$. □

Die Anzahl der Links- oder Rechtsnebenklassen einer Untergruppe nennt man auch den *Index* der Untergruppe; es spielt dabei keine Rolle, ob es sich um Links- oder Rechtsnebenklassen handelt, denn beide Anzahlen sind gleich! Wir haben also u.a. gerade bewiesen, daß *die Länge der Bahn von m gleich dem Index des Stabilisators von m ist.*

Hieraus und aus den vorangegangenen Beispielen können wir viele wichtige Folgerungen ziehen: Bei der Operation von U auf G per Linksmultiplikation sind alle Stabilisatoren trivial, $U_g = \{1\}$, mit dem Fundamentallemma ergibt sich

2.2.8 Der Satz von Lagrange *Ist U eine Untergruppe von G, dann haben alle Links- und alle Rechtsnebenklassen von U in G dieselbe Ordnung:*

$$|U| = |Ug| = |gU|.$$

Ist G eine endliche *Gruppe, dann ist $|U|$ ein Teiler von $|G|$ und wir haben*

$$|G/U| = \frac{|G|}{|U|}.$$

Aus diesem Satz folgt zum Beispiel, daß Untergruppen von S_3 höchstens die Ordnungen 1,2,3 oder 6 haben können. Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel einer Operation einer Gruppe mit einer Anwendung auf die Kombinatorik:

2.2.9 Anwendung (Binomialkoeffizienten) Die *natürliche* Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf der Menge n, das ist die Operation

$$S_n \times n \to n, (\pi, i) \mapsto \pi(i),$$

induziert, zu jedem $k \leq n$, folgende Operation von S_n auf der Menge $\binom{n}{k}$ aller $k-$*Teilmengen* von n :

$$S_n \times \binom{n}{k} \to \binom{n}{k}, (\pi, K) \mapsto \pi(K) = \{\pi(x) \mid x \in K\}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß jede k-Teilmenge K von n in jede andere k-Teilmenge K' von n übergeführt werden kann, durch Anwendung eines geeigneten $\pi \in S_n$. Mit dem Fundamentallemma und irgendeinem $K \in \binom{n}{k}$ bekommen wir also:

$$\left|\binom{n}{k}\right| = |S_n/(S_n)_K|\,.$$

Diese *Anzahl der k-Teilmengen* von n kürzt man einfachheitshalber mit demselben Symbol ab:

$$\binom{n}{k} := \left|\binom{n}{k}\right|,$$

diese Zahlen heißen bekanntlich *Binomialkoeffizienten.* Um sie genauer angeben zu können, brauchen wir uns jetzt nur noch zu überlegen, welche Ordnung der Stabilisator $(S_n)_K$ hat. Er besteht offenbar aus genau den $\pi \in S_n$, die sowohl K als auch den Rest $n \backslash K$ fest lassen, das sind die Permutationen der Form $\pi = \rho \cdot \sigma$, wobei ρ höchstens Elemente von K, σ höchstens Elemente der Restmenge vertauscht. Die Anzahl dieser Produkte ist aber $k! \cdot (n-k)!$, und wir erhalten deshalb das folgende interessante Ergebnis:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

◇

Das für die allgemeine Abzählung von Bahnen von Gruppenoperationen grundlegende Resultat ergibt sich jetzt, wenn wir noch den Begriff der *Fixpunkte* von $g \in G$ definieren:

$$M_g := \{m \mid gm = m\}.$$

2.2.10 Das Lemma von Cauchy-Frobenius *Ist G eine endliche Gruppe, M eine endliche G-Menge, dann ist die Anzahl der Bahnen von G auf M gleich der mittleren Fixpunktzahl der Elemente von G :*

$$|G \backslash\backslash M| = \frac{1}{|G|} \sum_g |M_g|.$$

Beweis:

$$\sum_{g \in G} |M_g| = \sum_{g \in G} \sum_{m \in M_g} 1 = \sum_{m \in M} \sum_{g \in G_m} 1$$

$$= \sum_{m \in M} |G_m| =_{2.2.7} |G| \sum_{m \in M} \frac{1}{|G(m)|} = |G| \cdot |G \backslash\backslash M|.$$

□

2.2.11 Bemerkung Die Anwendung dieser Abzählformel kann man sich mit Hilfe der Tatsache stark vereinfachen, daß die Anzahl der Fixpunkte $|M_g|$ konstant auf den Konjugiertenklassen ist (vgl. Übungsblatt). Man kann deshalb die Summe über alle Gruppenelemente durch die Summe über eine Transversale $\mathcal{C}$ der Konjugiertenklassen ersetzen, wenn man die Ordnungen der Konjugiertenklassen kennt,

$$|G \backslash\backslash M| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in \mathcal{C}} |C^G(g)| \cdot |M_g|.$$

Schließlich sei hierzu noch darauf hingewiesen, daß die Ordnung einer Konjugiertenklasse gleich dem Index des Zentralisators ist (nach dem Fundamentallemma):

$$|C^G(g)| = \frac{|G|}{|C_G(g)|}.$$

Beispielsweise zeigt eine kombinatorische Überlegung, daß der Zentralisator von $\sigma \in S_n$, also die Anzahl der $\pi \in S_n$, deren Anwendung auf die Ziffern in den zyklischen Faktoren von σ wieder σ ergibt, gleich

$$\prod_i i^{a_i(\sigma)} a_i(\sigma)!$$

ist, wenn $a_i(\sigma)$ die Anzahl zyklischer Faktoren von σ bezeichnet. Insgesamt erhalten wir also den folgenden Ausdruck für die Ordnung der Konjugiertenklasse von σ:

$$C^{S_n}(\sigma) = \frac{n!}{\prod_i i^{a_i(\sigma)} a_i(\sigma)!}.$$

◇

2.2.12 Beispiele

- Ist X eine endliche Menge, auf der die endliche Gruppe G von links operiert, Y irgendeine nicht leere endliche Menge, dann induziert die gegebene Operation ${}_G X$ von G auf X eine Operation ${}_G(Y^X)$ von G auf Y^X auf ganz natürliche Weise:
$$G \times Y^X \to Y^X, (g, f) \mapsto \tilde{f},$$
mit $\tilde{f}(x) := f(g^{-1}x)$. Ist jetzt $\bar{g}$ die Permutation von X, die durch $g \in G$ induziert wird: $\bar{g}: x \mapsto gx$, dann ist ein $f \in Y^X$ genau dann Fixpunkt, wenn f konstant auf den Bahnen (= Punktemengen in den zyklischen Faktoren) von $\bar{g}$ ist. Das schließt man direkt aus der folgenden Äquivalenz:
$$f \in (Y^X)_g \iff \forall\, x \in X: \; f(x) = f(g^{-1}x) = f(g^{-2}x) = \ldots$$
Wird die Anzahl dieser zyklischen Faktoren mit $z(\bar{g})$ bezeichnet, dann gilt also
$$\left|(Y^X)_g\right| = |Y|^{|\langle \bar{g} \rangle \backslash\backslash X|} = |Y|^{z(\bar{g})}.$$
Mit dem Lemma von Cauchy–Frobenius erhalten wir demnach
$$\left|G \backslash\backslash Y^X\right| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Y|^{z(\bar{g})}.$$

- Eine konkrete Anwendung hiervon ist die Ermittlung der Anzahl unnumerierter Graphen mit vorgegebener Punktezahl n, denn diese entsprechen ja, wie oben bereits beschrieben, der Bahnenmenge
$$S_n \backslash\backslash 2^{\binom{n}{2}}.$$
Mit dem Lemma von Cauchy–Frobenius ergibt sich demnach für die Anzahl aller unnumerierten Graphen mit n Punkten die Zahl
$$\left|S_n \backslash\backslash 2^{\binom{n}{2}}\right| = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} 2^{z(\bar{\pi})}.$$
(Es gibt natürlich auch eine explizite Formel für $z(\bar{\pi})$, ihre Herleitung ist aber länglich.)

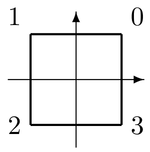
◇

Aufgabe 2.2.1
Sei (G, M) eine Gruppenoperation. Zeigen Sie:

a) Für $g \in G, m \in M$ ist $gG_m g^{-1} = G_{gm}$.

b) Sind G, M endlich und $g, h \in G$ konjugiert (in G), dann ist $|M_g| = |M_h|$.

Aufgabe 2.2.2



a) Geben Sie die Elemente der Symmetriegruppe D_4 des Quadrats, also die Gruppe der Drehungen und Spiegelungen, die das Quadrat in sich überführen, als Untergruppe der S_4 an.

b) Zeigen Sie, daß die Gruppe D_4 nicht von einem Element erzeugt werden kann, daß sie aber von einer Drehung und einer Spiegelung erzeugt wird.

Aufgabe 2.2.3
Im folgenden werde mit $a_r(\pi)$, $r \in \mathbb{N}^*$ und $\pi \in S_n$, die Anzahl der r-Zyklen in der kanonischen disjunkten Zyklenzerlegung von π bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Sind $\pi \in S_n$ und $(i_1\ i_2 \ldots\ i_r) \in S_n$ ein r-Zykel, dann gilt:

$$\pi\,(i_1 \ldots i_r)\pi^{-1} = (\pi(i_1)\,\pi(i_2) \ldots \pi(i_r)).$$

b) Sind $\sigma, \rho \in S_n$ konjugiert, dann ist $a_r(\sigma) = a_r(\rho)$ für alle $r \in \mathbb{N}^*$.

c) Sind $\sigma, \rho \in S_n$ gegeben mit $a_r(\sigma) = a_r(\rho)$ für alle $r \in \mathbb{N}^*$, dann sind σ und ρ konjugiert.

Aufgabe 2.2.4

a) Geben Sie aus jeder Konjugiertenklasse der S_4 genau ein Element an.

b) Die S_4 operiert auf der Menge $M := \binom{4}{2}$ der zweielementigen Teilmengen von 4 in natürlicher Weise (vgl. Vorlesung). Bestimmen Sie die auf M induzierte Zykelstruktur der in a) gewählten Elemente (Skizze).

c) Berechnen Sie die Anzahl der Graphen mit vier Punkten, d.i. die Anzahl der Bahnen von S_4 auf 2^M. (Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 13b) und 16b).)

Aufgabe 2.2.5
Das Kohlenstoffgerüst eines Benzolmoleküls ist

a) Geben Sie (ohne Begründung) die sechs Elemente der Symmetriegruppe B des obigen Moleküls als Untergruppe der S_6 an.

b) Jede der freien Bindungen der sechs Kohlenstoffatome seien jeweils durch ein Wasserstoff- oder Chloratom abgesättigt. Dabei ändert sich die Struktur des Kohlenstoffgerüsts nicht. Man nennt nun zwei Moleküle äquivalent, wenn sie durch ein Element von B ineinander übergeführt werden können. Wieviele Äquivalenzklassen gibt es (Begründung)?

   (Hinweis: Betrachten Sie die Bahnen von B auf 2^6.)