Prof. Dr. A. Kerber Wintersemester 2005/06

Codierungstheorie II

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei C ein binärer (n, k, d)-Code und $\delta := \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor$.

a) Leiten Sie die unbeschränkte Johnson-Schranke her:

$$A_w \leq J_u(n, d, w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } w < \delta \\ \left\lfloor \frac{n}{w} \left\lfloor \frac{n-1}{w-1} \cdots \left\lfloor \frac{n-w+\delta}{\delta} \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Gilt $A_w = J_u(n, d, w)$, so erhält man aus M ein $t - (n, w, 1)$-Design mit $t := w - \delta + 1$.

c) Überprüfen Sie die Behauptung aus Aufgabe 3 vom letzten Übungsblatt, dass die Codevektoren von Gewicht 4 des $\hat{H}_3$ ein $3 - (8, 4, 1)$-Design liefern.

Hinweis: Betrachten Sie die $A_w \times n$-Matrix M mit den entsprechenden Codevektoren als Zeilen. Die Anzahl der Einsen in einer Spalte von M ist $\leq J_u(n-1, d, w-1)$. Weiter mit Induktion.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei C ein binärer (n, k, d)-Code und $\delta := \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor$.

a) Leiten Sie nun die beschränkte Johnson-Schranke für die Anzahl A_w aller Codevektoren von Gewicht w für $w^2 \geq n(w - \delta)$ her:

$$A_w \leq J_b(n, d, w) := \left\lfloor \frac{n\delta}{w^2 - n(w - \delta)} \right\rfloor.$$

b) Gilt $A_w = J_b(n, d, w)$, so erhält man ein $2-(A_w, m_w, w-\delta)$-Design, wobei m_w die Anzahl der Codevektoren mit Gewicht w und einer Eins in einer beliebigen, fest vorgegebenen Komponente bezeichne.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für zwei Codevektoren c, c' vom Gewicht w gilt: $\langle c, c' \rangle \leq w - \delta$. Betrachten Sie dann wieder die Matrix M wie in Aufgabe 1 und schätzen Sie die Summe $S := \sum_{i,j \in A_w} \langle c_i, c_j \rangle$ in beiden Richtungen geeignet ab.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeichnen Sie das folgende symmetrische $2-(13, 4, 1)$-Design als projektive Ebene:

$$\{1,2,3,10\}, \{1,4,7,11\}, \{1,5,9,12\}, \{1,6,8,13\}, \{2,4,9,13\},$$
$$\{2,5,8,11\}, \{2,6,7,12\}, \{3,4,8,12\}, \{3,5,7,13\}, \{3,6,9,11\},$$
$$\{4,5,6,10\}, \{7,8,9,10\}, \{10,11,12,13\}$$

Abgabe: Montag, den 23.1.2006, 10:00 Uhr im Raum 3.2.O2.737