3.2. Bäume

Ein schlichter Graph ohne Kreise heisst *Wald*, ist er noch zusätzlich zusammenhängend so wird er *Baum* genannt. Bevor wir Bäume genauer beschreiben ein kleines

LEMMA 3.2.1. *Ein schlichter zusammenhängender Graph G mit n Knoten hat mindestens $n-1$ Kanten.*

BEWEIS. Wir beweisen dies mit Induktion über n. Wir beginnen mit $n=1$, da ist das klar, auch für $n=2$ sieht man es direkt. Sei G nun ein zusammenhängender Graph mit n Knoten. Wir nehmen an, er hat weniger als $n-1$ Kanten. Es gibt keine Knoten von Valenz 0, da ja zusammenhängend. Es gibt aber einen Knoten x von Valenz 1 (!), d.h. dieser ist über eine einzelne Kante mit dem Rest verbunden, nach Induktion hat der Rest = $G\backslash x$ mindestens $n-2$ Kanten, was dann insgesamt für G mindestens $n-1$ Kanten liefert. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

THEOREM 3.2.2. *äquivalente Beschreibungen von Bäumen*
Sei G ein schlichter Graph mit n Knoten und m Kanten, dann sind äquivalent:

(1) *G ist ein Baum.*
(2) *Zwischen 2 Knoten von G existiert genau ein Weg.*
(3) *G ist zusammenhängend und bei Entfernen einer beliebigen Kante zerfällt G. (kantenminimal zusammenhängend)*
(4) *G ist zusammenhängend und $m = n-1$.*
(5) *G hat keinen Kreis und Hinzufügen einer beliebigen Kante erzeugt genau einen Kreis. (kantenmaximal kreisfrei)*

BEWEIS.
$1 \Rightarrow 2$: G ist ein Baum, also zusammenhängend und damit existitiert zwischen zwei Knoten mindestens 1 Weg. Wir nehmen an es gibt zwei verschiedene Wege, dann kann man daraus einen Kreis konstruieren, was ein Widerspruch zur Kreisfreiheit ist.

$2 \Rightarrow 3$: zusammenhängend ist klar da ja ein Weg existiert. Nehmen wir an es gibt eine Kante xy die entfernt werden kann ohne dass G zerfällt, dann gibt es es auch einen Weg $x - \ldots - y$ und dass wäre in G ein zweiter Weg neben der entfernten Kante xy.

$3 \Rightarrow 4$:Mit Induktion nach Anzahl der Knoten. Für $n=2$ ist es wahr. Nun entfernt man eine beliebige Kante und für die entstehenden zwei Graphen G_1, G_2 gilt die Induktionsannahme. Die beiden Graphen haben dann $m_1 = n_1 - 1$ und $m_2 = n_2 - 1$ Kanten, addiert man diese und fügt noch die entfernte Kante hinzu erhält man die Behauptung.

$4 \Rightarrow 5$:Annahme: G hat einen Kreis, dann bleibt G nach Entfernen einer Kante z aus diesem Kreis zusammenhängend (!) und $G\backslash z$ hat mindestens $n-1$ Kanten, G hat also mindestens n Kanten was einen Widerspruch liefert. G ist also kreislos und nach Voraussetzung zusammenhängend. Fügt man nun eine Kante xy hinzu so schließt diese den (wg. zusammenhängend) Weg $x - \ \ldots - y$ zu einen Kreis. Gebe es noch einen zweiten Kreis durch xy so gab es auch vorher schon einen Kreis, woraus nach Entfernen einer Kante des Kreises ein zusammenhängender Graph mit $n-2$ Kanten entstünde. Widerspruch.

$5 \Rightarrow 1$:Zu zeigen ist, dass G zusammenhängend da kreislos nach Voraussetzung. Nehmen wir an G ist nicht zusammenhängend, dann gibt es zwei Knoten x, y die nicht verbunden sind, dann können wir aber die Kante xy hinzufügen ohne einen Kreis zu erzeugen. □

EXAMPLE 3.2.3. chemische Moleküle

Die Alkane (chemische Formel C_nH_{2n+2}) haben baumartige Moleküle. Dies sieht man wie folgt:

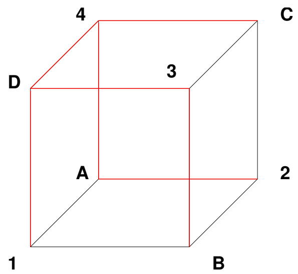
- der zugehörige Graph ist zusammenhängend

- die Anzahl der Knoten ist $3n+2$

- die Anzahl der Kanten ist $3n + 1$, was man durch Addieren der Valenz (4 für Kohlenstoff und 1 für Wasserstoff)= $(2n + 2) + 4n = 6n + 2$ und dann Teilen durch 2 (Handshaking Lemma) sieht.

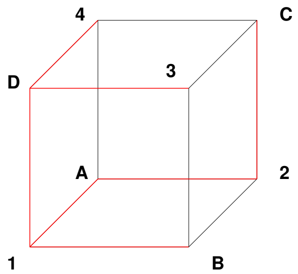
Der Zusammenhangstest-Algorithmus liefert als Ergebnis eigentlich einen Teilgraphen der ein Baum ist. Dazu merkt man sich bei jedem Knoten mit welcher Kante man zu ihm kommt. Ein solcher Teilgraph in einem zusammenhängenden Graphen heisst *spannender Baum*.

EXAMPLE 3.2.4. Würfel
Im Falle des Würfels aus obigen Beispiel bekommt man folgenden Teilbaum:



Aufgrund der verwendeten Datenstruktur bei der Menge S (Schlange = first in first out = FIFO) wurde der spannende Baum in der sog. *breath first* Methode aufgebaut, man spricht auch von einem *BFS* Durchlauf durch den Graphen. Verwendet man statt einer Schlange einen Keller (=last in first out = LIFO) wird der Baum in der *depth first* Methode aufgebaut, man spricht von einem *DFS* Durchlauf.

EXAMPLE 3.2.5. Würfel DFS



Oft stellt sich die Frage nach einem spannenden Baum in einem Netzwerk, dies ist ein Graph mit Kantenbewertungen (z.B. Entfernungen oder Kosten). Dann möchte man einen spannenden Baum mit minimalen Kosten. Man kann dazu wie folgt vorgehen:

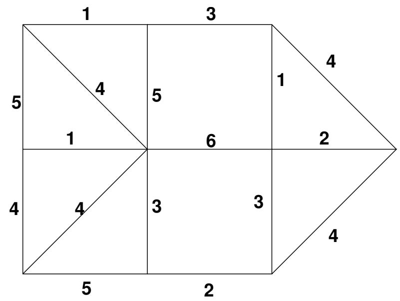
ALGORITHM 3.2.6. *minimaler spannender Baum*
input: zusammenhängender Graph (V, E)*mit Kantenbewertung*
output:spannender Baum mit minimalen Gewicht
Starte mit einer leeren Kantenmenge $S := \emptyset$
Solange (V, S) *nicht zusammenhängend ist*
{
nimm die minimale Kante e*, die zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten verbindet*
füge e *zu* S

}

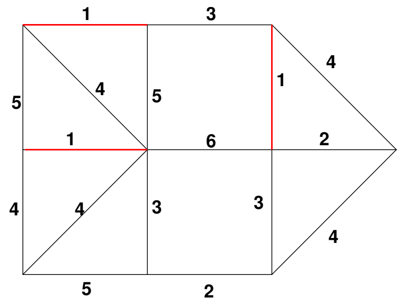
gebe (V, S) *zurück*

Dies ist ein Beispiel eines *greedy* Algorithmus.

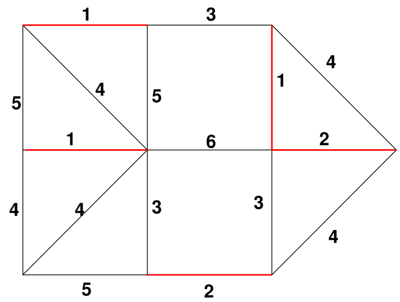
EXAMPLE 3.2.7. Beispiel für greedy Algorithmus
Wir starten mit dem Graphen



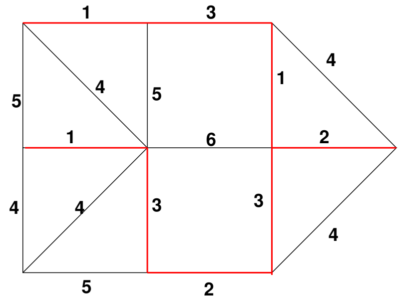
in den ersten drei Schritten werden die Kanten vom Gewicht 1 genommen, dies ist dann folgende Situation:



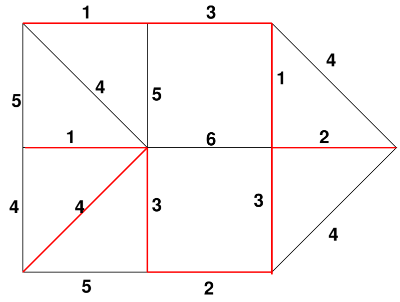
Auch die beiden Kanten von Gewicht 2 werden mit ausgewählt:



Auch die drei mit Gewicht 3 :



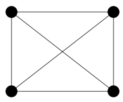
Von den Kanten von Gewicht 4 wird nur noch eine ausgewählt, die zu dem letzten nicht ausgewählten Knoten führt:



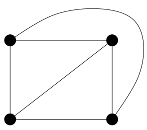
Beispiel für eine Anwendung ist der Versuch ein Telefonnetzwerk oder Stromleitungsnetz zwischen einer gegebenen Anzahl von Städten aufzubauen. In diesem Fall muss nur jede Stadt am Netz hängen man hat aber die Freiheit festzulegen zwischen welchen Städten eine Leitung läuft. Man kann bei dieser Problemstellung auch stets von einem *vollständigen* Graphen ausgehen, d.h. zwischen allen Knoten sind Kanten, sollte eine nicht da sein wird einfach für diese Kanten ein sehr hohe (=unendlich) Kantenbewertung angesetzt. Betrachtet man das Problem des Hamilton'schen Kreises aus einem Graph mit Kantenbewertungen ist man beim Problem des Handlungsreisenden (*traveling salesman problem* TSP), auch dies ist wieder (klar denn schon das einfachere Problem war schwierig) ein sehr schweres Problem.

3.3. Planare Graphen

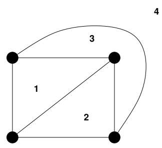
Ein Graph heisst *planar*, wenn er in der Ebene ohne Überschneidungen der Kanten gezeichnet werden kann. Man betrachtet auch hier nur schlichte Graphen, da Schleifen, Mehrfachkanten, Richtungen keine zusätzlichen Probleme bereiten. Auch betrachtet man aus dem gleichen Grund nur zusammenhängende Graphen. Die Definition bedeutet, dass es eine planare Zeichnung geben muss, d.h. der Graph



ist planar, da er wie folgt gezeichnet werden kann:

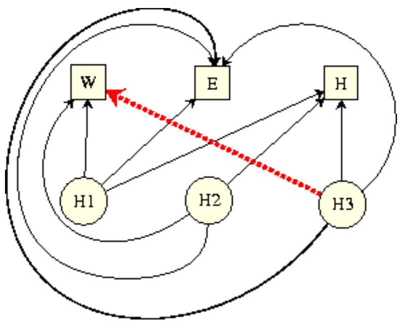


Die Zeichnung eines planaren Graphs zerlegt die Ebene in *Flächen*, die durch die Kanten begrenzt sind, plus einer unendlichen äusseren Fläche.



EXAMPLE 3.3.1. Wasserwerk

In einem alten Kinderspiel sollen 3 Häuser H1, H2 und H3 jeweils mit einem Wasserwerk W, einem Elektrizitätswerk E und einem Heizkraftwerk H durch Leitungen so verbunden werden, dass die Leitungen sich nicht überkreuzen. Visualisiert ist dies die Frage ob folgender Graph planar ist.



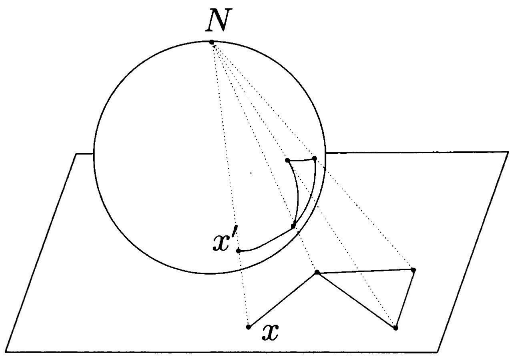
Das Problem mit der Sonderstellung der äusseren Fläche lösst man am einfachsten indem man sich mittels stereographischer Projektion klarmacht:

LEMMA 3.3.2.

Sei G ein schlichter zusammenhängender Graph.

G ist (in der Fläche) planar $\iff$ G lässt sich auf der Kugeloberfläche kreuzungsfrei zeichnen.

BEWEIS.



□

Das wichtigste Ergebnis ist wieder von Euler:

THEOREM 3.3.3. *Eulersche Polyederformel*

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Flächen. Dann gilt:

$$n - m + f = 2.$$

BEWEIS. Wir beweisen dies mit Induktion nach Anzahl der Flächen.

Induktionsanfang $f = 1$: Dann ist die einzige Fläche, die äussere. Dies bedeutet es gibt im Graphen keine Kreise, dann ist der zusammenhängende Graph ein Baum und es gilt nach 3.2.2: $n = m + 1$. Was dann liefert:

$$n - m + f = (m + 1) - m + 1 = 2.$$

Induktionsschritt: Es gebe mehr als eine Fläche, dann muss es einen Kreis in G geben. Jede der Kanten in diesem Kreis trennt zwei Flächen (!). Entfernt man eine dieser Kanten, ist der Graph immer noch zusammenhängend (!) hat aber eine Fläche weniger. Nach Induktionsannahme gilt:

$$n - (m - 1) + (f - 1) = 2.$$

Durch Zusammenfassen der linken Seite erhält man die gesuchte Gleichheit:

$$n - m + f = 2.$$

□

Die Bemerkung, dass ein Kreis zwei Flächen trennt mag anschaulich klar sein, bedarf aber eines eigenständigen Beweises. (nicht hier)

Es ergibt sich direkt aus dieser Formel, dass der Wasserwerk graph nicht planar ist, und auch der vollständige Graph mit 5 Knoten ist nicht planar.

COROLLARY 3.3.4. *Maximale Anzahl von Kanten in einem planaren Graphen*

Ein planarer Graph G mit n (≥ 3) Knoten hat höchstens $3n - 6$ Kanten.

BEWEIS. Wir machen den Graphen G *maximal planar* (d.h. man kann keine weiteren Kanten hinzufügen ohne Planarität zu verlieren) durch Hinzufügen von Kanten in allen Flächen, die kein Dreieck sind. Sei G' der Graph der durch Triangulieren entsteht. Betrachte den *bipartiten* Graph zwischen den Kanten E und den Flächen F des planaren graphs G'. Es ist eine Kante zwischen e und f falls e an f grenzt. Da jede Fläche ein Dreieck ist hat der bipartite Graph $2|E| = 3|F|$ Kanten. Daher ersetzen wir f durch $2m/3$ in der Euler Formel und bekommen

$2 + m = n + 2m/3 \Leftrightarrow 6 + 3m = 3n + 2m \Leftrightarrow m = 3n - 6$

als eine obere Schranke der Kantenanzahl. □

Ein bipartiter Graph ist ein Graph deren Knotenmenge man in zwei Teilmengen A und B zerlegen kann, sodass es nur Kanten zwischen Knoten aus A und B gibt. Dieser Trick einmal die Kanten bei E und einmal bei F zu zählen nennt man *doppeltes Abzählen*. Eine Variante war auch schon beim handshaking lemma verwendet worden.

COROLLARY 3.3.5.

In einem planaren Graphen gibt es einen Knoten mit Valenz 5.

BEWEIS. Hätten alle n Knoten eine Valenz ≥ 6, dann ergäbe obige Formel (m ist die Anzahl der Kanten)

$$3n \leq m \leq 3n - 6$$

□

COROLLARY 3.3.6.

Sei G ein planarer Graph, dessen Knoten alle die Valenz 3 haben, dessen Kanten nur $5-$ und $6-$Ecken begrenzen, dann ist die Anzahl der Fünfecke genau 12.

BEWEIS. Sei n die Anzahl der Knoten und m die Anzahl der Kanten von G. Wir bilden wieder den bipartiten Graphen, dessen Knotenmenge einerseits aus der Kantenmenge und andererseits aus der Menge der Flächen von G besteht. Diese Knoten verbinden wir wiederum, wenn eine Kante eine Fläche begrenzt. Zählen wir die so erhaltenen Kanten dieses bipartiten Graphen, so erhalten wir $2m$, da jede Kante von G an 2 Flächen grenzt. Da jede Fläche entweder 5-Eck oder 6-Eck ist, ist diese Zahl aber auch $5f_5 + 6f_6$, wobei f_5 die Anzahl der 5-Ecke und f_6 die Anzahl der 6-Ecke ist. Wir habe vorausgesetzt, dass jeder Knoten von G die Valenz 3 hat, so dass $2m = 3n$ ist. Eingesetzt ergibt sich

$$5f_5 + 6f_6 = 3n.$$

Die Eulersche Formel liefert

$$f_5 + f_6 = m - n + 2.$$

Die letzte Gleichung multiplizieren wir mit 6 und subtrahieren die erste Gleichung. Es folgt

$$f_5 = 6m - 9n + 12 = 12,$$

da $2m = 3n$ ist. □

Diese planaren Graphen treten in der Natur als Oberflächen von Viren auf. Sie sind auch als Fullerene bekannt geworden, seit Chemiker sie als Moleküle aus C-Atomen konstruieren konnten. Dabei ist wiederum R. Buckminster Fuller der Name eines Architekten, Ingenieurs und Mathematikers (geb. 1895, gest. 1983), Prof. an der Carbondale Southern Illinois University, von 1959 bis 1975, der grosse Hallen baute, deren Haut aus regulären Flächen besteht. Der Fussball der deutschen Bundesliga ist ein weiteres bekanntes Beispiel.

Ein prominentes Problem, das schliesslich von Appel und Haken mit Hilfe von Computern gelöst wurde, ist deas 4-Farben Problem. Bei diesem Problem wird ein Beweis gefragt, dass jede Landkarte mit zusammenhängenden Ländern so gefärbt werden kann, dass je zwei benachbarte Länder verschiedene Farben erhalten. Der Beweis von Appel und Haken ist allerdings sehr aufwendig. Mit den bereits entwickelten Methoden können wir jedoch Kempes Beweis führen, dass 5 Farben genügen.

THEOREM 3.3.7. *5 Farbensatz*

Jede Landkarte von zusammenhängenden Ländern kann so mit 5 Farben gefärbt werden, dass je zwei benachbarte Länder verschiedene Farben erhalten.

BEWEIS. [KEMPE] Der erste Schritt besteht darin, das Problem in ein graphentheoretisches Problem zu transformieren. Dazu wird jedes Land durch seine Hauptstadt repräsentiert, die einen Knoten eines Graphen bildet. Sind zwei Länder benachbart, so werden diese Knoten durch eine Kante verbunden. Es ergibt sich ein planarer Graph G, dessen Knoten so zu färben sind, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben erhalten. Der Beweis wird nun mit Induktion nach der Anzahl n der Knoten dieses Graphen geführt. Bei nur einem Knoten ist die Behauptung offensichtlich wahr. Sei nun $n > 1$ und die Behauptung bereits richtig für planare Graphen mit kleinerer Knotenzahl. Wir können dann sofort annehmen, dass der Graph zusammenhängend ist, da sonst die einzelnen zusammenhängenden Teile jeweils bereits mit 5 Farben gefärbt werden können. Nach unseren Folgerungen der Eulerschen Formel wissen wir, dass es einen Knoten a von Valenz ≤ 5 gibt. Wir betrachten den Teilgraphen G', der sich aus G durch Entfernen von a und der Kanten, die a berühren, ergibt. Dann ist G' ein planarer Graph, der nach der Induktionsannahme mit 5 Farben gefärbt werden kann. Haben die Nachbarn von a weniger als 5 Farben, so kann a mit einer Farbe gefärbt werden, die bei seinen Nachbarn nicht auftritt, und der Beweis ist erbracht.

Es bleibt daher der Fall zu untersuchen, dass a genau 5 Nachbarn besitzt, die mit 5 verschiedenen Farben gefärbt sind. Diese sind in der Ebene gezeichnet und mögen im Uhrzeigersinn durchlaufen die Namen $b_1, \ldots, b_5$ haben. Ihre Farben bei der Färbung von G' seien $F_1, \ldots, F_5$ in dieser Reihenfolge. Wir betrachten nun alle Wege, die bei b_1 starten und nur die Farben F_1 und F_3 verwenden. Falls kein solcher Weg zu b_3 führt, können wir bei allen auf diesen Wegen erreichbaren Knoten die Farben F_1 und F_2 austauschen, ohne dass benachbarte Knoten gleiche Farbe erhalten würden. Dann treten bei den Nachbarn von a nur noch 4 verschiedene Farben auf, und a erhält die nun erlaubte Farbe F_1.

Falls ein solcher Weg zu b_3 führt, begrenzt er einen Kreis, der von b_3 über a zurück zu b_1 führt. Dieser Kreis trennt die Ebene in zwei Gebiete so, dass b_2 in einem Gebiet und die Knoten b_4, b_5 in den anderen Gebiet liegen. Insbesondere muss jeder Weg, der von b_2 ausgeht und etwa b_4 erreicht, durch einen Knoten des Kreises laufen. Dieser Knoten hat dann als Farbe entweder F_1 oder F_2. Dann kann aber kein Weg von b_2 aus starten, nur Knoten der Farben F_2, F_4 verwenden, und zu b_4 führen. Nun schliessen wir wie mit b_1 zuvor. Wir können bei allen von b_2 ausgehenden Wegen, deren Knoten nur die Farben F_2, F_4 verwenden, diese beiden Farben austauschen. Dadurch wird die Farbe F_2 für a verfügbar und 5 Farben reichen aus. □